

RABAE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Física



El formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria en el procesamiento óptico de la información

Tesis para optar al grado de Doctor presentada por:

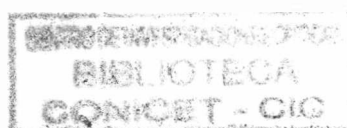
Sergio Carlos Granieri

Director: Dr. Enrique E. Sicre

Asesor académico: Dr. Mario Garavaglia

Lugar de realización: Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Agosto de 1998



A mi esposa, Cecilia

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer al Dr. Enrique E. Sicre por haber aceptado dirigir este trabajo de tesis. Tanto su orientación, en estos años de formación doctoral, como su ayuda y sus consejos han resultado invalorable para la concreción de esta memoria.

Al Dr. Mario Garavaglia por haber aceptado la Asesoría académica de esta tesis y al Dr. Mario Gallardo por haberme permitido formar parte, durante estos años, del plantel de investigación del Centro de Investigaciones Ópticas.

También debo agradecer al Dr. Néstor Bolognini, al Dr. Walter Furlan y al Lic. Ricardo Arizaga por sus aportes de ideas, discusiones y experiencia de laboratorio, fundamentales en mi trabajo de investigación.

Deseo manifestar mi profundo agradecimiento a todos los compañeros del Centro de Investigaciones Ópticas, particularmente a los del Grupo de Óptica, a los del "entrepiso" y a los que compartieron conmigo la mesa de Rush en los almuerzos, por crear un ambiente de trabajo en el que siempre me sentí muy cómodo.

Una mención especial a mis amigos de la lista "Mordor" con quienes compartí años muy felices de mi vida universitaria.

Agradezco especialmente a mi padre por su constante aliento y afecto desde el comienzo de mi carrera universitaria.

Finalmente quiero agradecer a mi esposa, Cecilia, quien con su compañía hizo que todo me resultara más fácil. A ella dedico esta tesis.

Índice

I	Introducción general	6
I.1	Antecedentes y objetivos	6
I.2	Esquema general	8
II	Definiciones y propiedades de la FRFT	10
II.1	Introducción	10
II.2	Definición basada en el medio GRIN	11
II.3	Definición basada en la WDF	16
II.3.1	Algunas propiedades de la WDF	16
II.3.2	Definición de la FRFT	20
II.4	Compatibilidad entre definiciones y propiedades	26
II.4.1	Compatibilidad	26
II.4.2	Propiedades de la FRFT	27
III	La FRFT y los patrones de difracción de Fresnel	31
III.1	Introducción	31
III.2	La difracción en la región de Fresnel.	32
III.3	La FRFT generada por difracción	35
III.4	Aplicación al filtrado espacial en la región de Fresnel	40
III.5	Cálculo numérico de la FRFT	47
III.5.1	Implementación basada en las funciones de Hermite-Gauss	47
III.5.2	Cálculo directo de la integral con núcleo de Fresnel	50
IV	La representación (x,p) y sus aplicaciones.	52
IV.1	Introducción	52
IV.2	Representaciones espacio-fase basadas en la FRFT	54
IV.2.1	La representación (x,p)	54
IV.2.2	La representación (r,p)	55
IV.2.3	Relación entre la FRFT y la transformación de Radón-Wigner	57
IV.3	Implementación óptica de la representación de Radon-Wigner	58
IV.4	Aplicaciones del formalismo de la FRFT al análisis de calidad de sistemas ópticos	70

IV.4.1 Relación entre el formalismo de la FRFT y los criterios de calidad en sistemas ópticos	71
IV.4.2 Estudio de la profundidad focal en apodizadores asimétricos	82
V La correlación óptica fraccionaria	87
V.1 Introducción	87
V.2 Definición de la correlación fraccionaria	88
V.3 Correlador óptico sensible a las translaciones	90
V.4 Generalización de la correlación fraccionaria	97
VI Conclusiones	112
A Definición matemática de la FRFT	117
B Algunos teoremas sobre la FRFT	119
B.1 Generalización del Teorema de Parseval	119
B.2 Teorema de translación	120
B.3 Teorema de cambio de escala	121
B.4 Teorema de la derivada	123
Bibliografía	125

Capítulo I

Introducción general

I.1 Antecedentes y objetivos

La transformada de Fourier es una de las herramientas matemáticas más utilizadas en la física y de gran importancia en el procesamiento de distintos tipos de señales. En lo que refiere a la óptica, a mediados de este siglo, fue comprobada la capacidad de las lentes esféricas para realizar la transformada de Fourier de una señal con luz coherente [1]. De esta manera, el poder manipular su espectro de frecuencias espaciales, permite alterarla para cambiar alguna de sus características. Desde entonces esta importante propiedad fue utilizada en diversas aplicaciones vinculadas al filtrado espacial en la región de Fraunhofer como por ejemplo el procesado de imágenes y el reconocimiento de patrones [2, 3, 4, 5].

Una generalización de la transformada de Fourier, llamada transformada de Fourier fraccionaria o transformada de Fourier de orden fraccional, fue propuesta en 1980 por Namias [6] y posteriormente formalizada por McBride y Kerr [7]. En estos trabajos la transformada de Fourier fraccionaria, utilizada con propósitos puramente matemáticos, es aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y a derivadas parciales de interés en mecánica cuántica. En 1993, Mendlovic y Ozaktas [8] introducen esta transformación en el campo de la óptica. Para ello utilizan una definición física de la transformada de Fourier fraccionaria fundamentada en la propagación de luz en un material con índice de refracción variable de perfil parabólico. Posteriormente Lohmann [9] propone una nueva definición de esta transformación

basada en la rotación, en el espacio de las fases, de la función de distribución de Wigner de la señal. Este último enfoque a la transformada de orden fraccionario, totalmente compatible con el primero, es el que permite las más interesantes aplicaciones puesto que facilita la construcción de transformadores ópticos sencillos, compuestos por lentes y/o espejos, para implementarla.

La transformada de Fourier fraccionaria contiene información mixta, espacial y espectral, de la señal. Este hecho se evidencia al coincidir con la transformada de Fourier en el caso en que el orden fraccionario es la unidad (caso espectral puro) y con la señal original cuando el orden es cero (caso espacial puro). Esta propiedad, al igual que en la función de distribución de Wigner y en otros formalismos espacio-fase, la hacen adecuada para analizar fenómenos de propagación luminosa. Entre los fenómenos de difracción son de gran interés: el estudio de las propiedades de enfoque y otros parámetros de calidad en los sistemas ópticos formadores de imágenes, y la caracterización de algunos tipos de pupilas apodizadoras.

El producto de correlación es una operación que está estrechamente vinculada a la transformada de Fourier. Su implementación óptica es utilizada en diversas aplicaciones como por ejemplo la identificación de patrones y la localización de objetos [3, 10]. A partir del formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria surge una generalización del producto de correlación que tiene propiedades diferentes a la definición clásica [11]. Una de las diferencias fundamentales entre la correlación fraccionaria y la correlación ordinaria es la ruptura de la invariancia translacional típica de ésta. Por lo tanto, el estudio de su comportamiento y sus propiedades es fundamental para avanzar en el desarrollo de dispositivos de reconocimiento de patrones sensibles a la localización del objeto.

El objetivo general de este trabajo de tesis consiste en investigar la incidencia del formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria en el procesamiento óptico de la información, analizar su relación con otras transformadas de interés óptico y desarrollar sus posibles aplicaciones.

I.2 Esquema general

En el Capítulo II, se presentan los fundamentos del formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria (FRFT) considerándola como una generalización de la transformada de Fourier. En la segunda sección se define ópticamente a la FRFT en base a la propagación de luz en un medio de índice de refracción variable parabólico y se deduce una forma matemática para su operador. En la sección siguiente, luego de una breve reseña sobre la definición y propiedades de la función de distribución de Wigner (WDF), se presenta a la FRFT como una operación asociada a la rotación de la WDF de una señal en el espacio de las fases y se discute la forma de generarla ópticamente. Finalmente, se analiza la compatibilidad entre estas dos definiciones y se estudian una serie de teoremas sobre la FRFT cuyas contrapartes en el formalismo de Fourier clásico son de gran importancia en óptica. Como complemento, en el Apéndice B, se realiza la demostración formal de estos teoremas.

A continuación, en el Capítulo III, se estudia la relación existente entre los patrones de difracción en la región de Fresnel y la FRFT como una extensión lógica del vínculo entre los patrones de difracción de campo lejano, o de Fraunhofer, y la transformada de Fourier ordinaria. Como aplicación de estas relaciones se proponen dos arreglos ópticos para generar la FRFT de una transparencia por simple propagación de una onda esférica convergente y se estudia la variación de sus parámetros geométricos en función del orden fraccionario. A fin de demostrar las posibilidades de este formalismo, se lo aplica al filtrado espacial en la región de Fresnel utilizando la relación entre la FRFT y las autoimágenes de una transparencia periódica. Al final del capítulo se resume la labor realizada en el desarrollo de programas y estudio de algoritmos usados para calcular la FRFT en forma numérica.

El Capítulo IV se analizan dos nuevas representaciones de la FRFT, la (x,p) y la (r,p) , y su relación con la transformación de Radon-Wigner. Se realiza el diseño e implementación de un procesador óptico, basado en una lente varifocal, que realiza en paralelo todas las FRFT de órdenes entre 0 y 1, de manera continua, de una transparencia. La salida del procesador corresponde a la representación de Radon-Wigner de la función de entrada. En la segunda mitad del capítulo se establece una

relación entre el formalismo de la FRFT y diferentes parámetros de calidad de sistemas ópticos formadores de imágenes, como por ejemplo la razón de Strehl y la función de transferencia óptica; para posteriormente aplicar la FRFT al estudio comparativo de problemas de enfoque en pupilas con diferentes obscuraciones centrales y pupilas apodizadoras asimétricas.

En el Capítulo V se estudia la correlación fraccionaria, operación derivada de la FRFT, su generación óptica y sus propiedades. A partir de una modificación del correlador de Vander Lugt, se presenta la implementación de un correlador sensible a las translaciones del objeto a correlacionar utilizando un registro holográfico alojado en un cristal fotorefractivo BSO. Se estudia la ruptura de la invariancia espacial producida por dos efectos: la característica fraccionaria de las transformadas de Fourier involucradas en la correlación y la utilización de un holograma de volumen como filtro. Posteriormente, se realiza una generalización de la correlación fraccionaria para el caso de órdenes fraccionarios diferentes. A partir de esta nueva definición de correlación fraccionaria se propone e implementa un correlador óptico sensible a las translaciones que puede ser ajustado, en forma flexible, para reconocer diferentes magnificaciones del objeto.

Finalmente, en el Capítulo VI, se resumen las conclusiones de este trabajo.

Capítulo II

Definiciones y propiedades de la FRFT

II.1 Introducción

En este capítulo se presentan dos definiciones ópticas de la transformada de Fourier fraccionaria junto con la deducción de los operadores matemáticos que las representan. Toda definición de la FRFT de una señal u , a la que denotaremos como $\mathcal{F}^p u$ o u_p , siendo p el orden de la transformada, debe cumplir con dos postulados básicos:

- i) Si el parámetro fraccionario toma o tiende al valor unidad ($p \rightarrow 1$), la FRFT deberá coincidir con la transformada de Fourier ordinaria (FRFT \rightarrow FT).
- ii) La FRFT debe verificar $\mathcal{F}^p [\mathcal{F}^q u] = \mathcal{F}^p \mathcal{F}^q u = \mathcal{F}^q \mathcal{F}^p u = \mathcal{F}^{p+q} u$.

La primera de las condiciones asegura que la definición de la FRFT es compatible con la transformada de Fourier ordinaria. La segunda es un requisito formal que asegura la continuidad y aditividad de los índices del operador.

En la segunda sección se estudia la propagación luminosa en un medio de índice gradual parabólico (GRIN), sus modos propios y una definición óptica de la FRFT que está basada en las características de este medio. En la tercera sección se revisan algunas propiedades de la función de distribución de Wigner para luego analizar la definición de la FRFT que está asociada a la rotación de la WDF en el espacio de las fases. Finalmente, en la cuarta sección, se discute la compatibilidad de

las definiciones estudiadas y se enumeran algunas de las propiedades de la FRFT.

II.2 Definición basada en el medio GRIN

Con esta definición, Mendlovic y Ozaktas introducen en la óptica el formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria [8, 12, 13]. Los medios ópticos de índice de refracción variable (GRIN) cuadrático tienen la propiedad de enfocar un campo luminoso a medida que se propaga. La forma en que varía el índice de refracción en un medio GRIN es

$$n^2(r) = n_1^2 \left[1 - (n_2/n_1) r^2 \right], \quad (\text{II.1})$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$ es la distancia radial desde el eje óptico y n_1, n_2 son parámetros del medio [14]. La relación funcional entre el índice de refracción y la distancia axial puede observarse en la Figura II.1(a). Una onda plana que ingrese en un medio GRIN se enfocará después haberse propagado a lo largo del medio una distancia L dada por

$$L = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}, \quad (\text{II.2})$$

como lo muestra la Figura II.1(b). Por lo tanto, si introducimos un campo escalar $u(x, y)$ en el plano $z = 0$ de un medio GRIN cuadrático, en el plano $z = L$ obtendremos su transformada de Fourier, $\mathcal{F}u$ [14]. De esta manera, es posible definir físicamente a la FRFT de orden p de la señal u , como la distribución del campo escalar en el plano $z = pL$. Veamos que así definida, la FRFT cumple con los dos postulados básicos mencionados anteriormente. El primero es directo, pues para $p = 1$ se verifica que $z = pL = L$, con lo cual la FRFT de orden uno coincide con la transformada de Fourier ordinaria. El segundo postulado puede entenderse fácilmente si notamos que el orden fraccionario p está directamente relacionado con la distancia de propagación z , así la aditividad y la conmutatividad en los índices queda reducida a la aditividad y conmutatividad en la propagación como lo muestra la Figura II.2. En ésta, se ilustra el efecto sobre el índice de la FRFT que resulta de realizar dos propagaciones sucesivas a lo largo de las distancias $z_1 = p_1 L$ y $z_2 = p_2 L$. El campo escalar obtenido

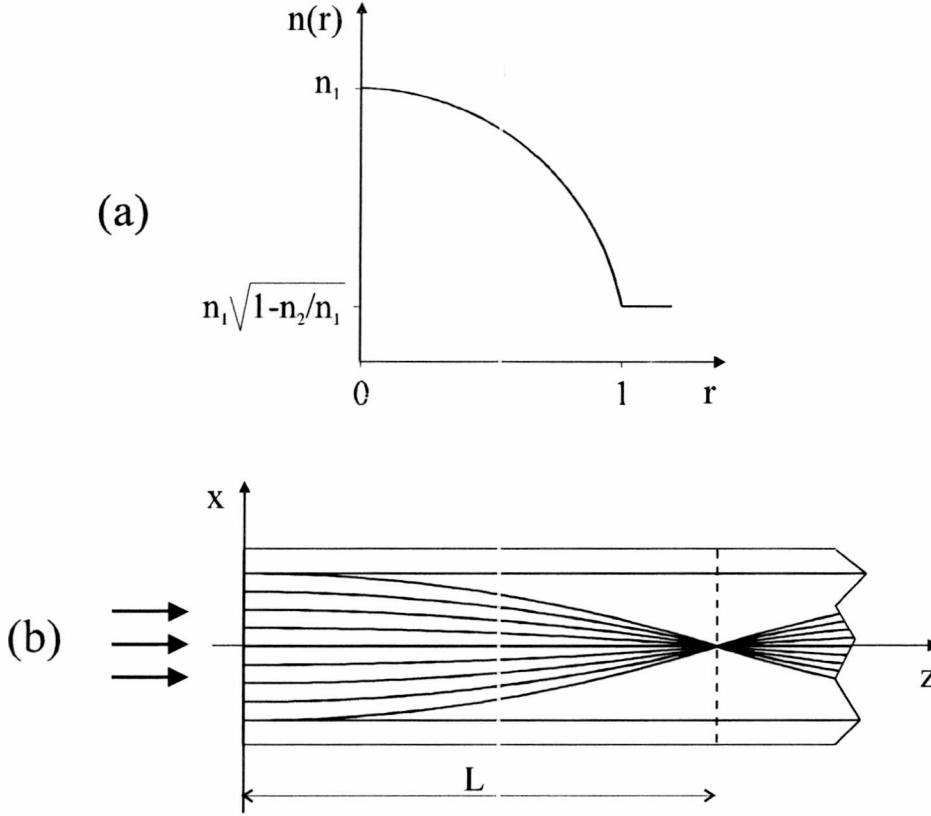


Figura II.1: (a) Índice de refracción vs. distancia axial al eje óptico en un medio de índice gradual (GRIN) parabólico, (b) Propagación de una onda plana en dicho medio.

después de realizar una propagación de $z = z_1 + z_2$ representa a la FRFT de orden $p = p_1 + p_2$.

En base a esta definición física de la FRFT puede deducirse, en forma matemática, la expresión del operador asociado a la transformada fraccionaria de orden p . En lo que resta de la sección nos restringiremos al caso de señales unidimensionales. La extensión al caso bidimensional es directa y al final de la sección se dará la expresión del operador para este caso.

El medio GRIN cuadrático para una dimensión tiene un índice de refracción dado por

$$n^2(r) = n_1^2 \left[1 - (n_2/n_1) x^2 \right], \quad (\text{II.3})$$

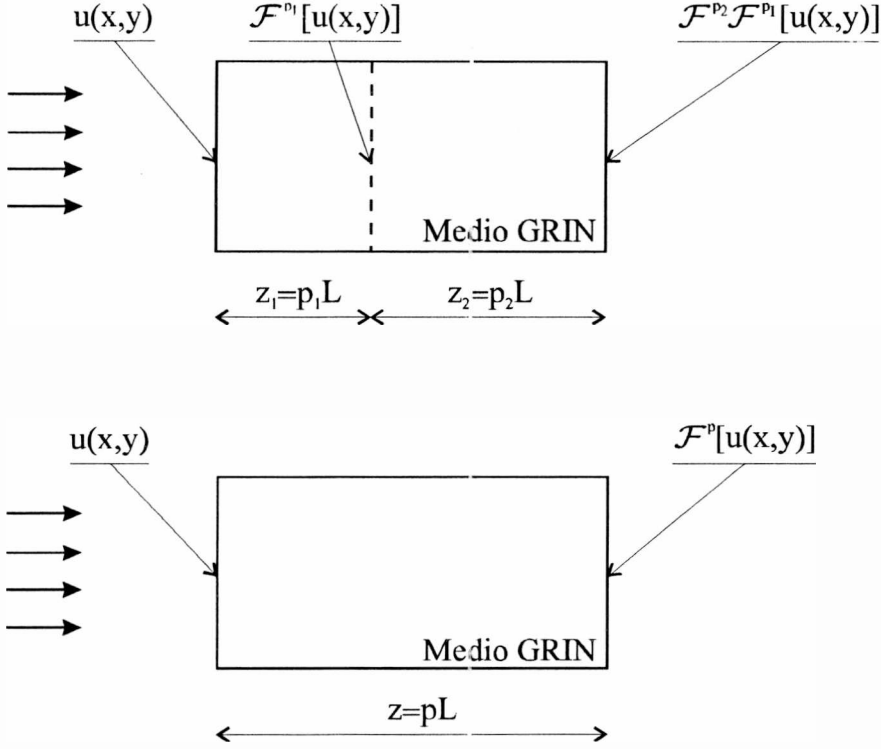


Figura II.2: Esquema que ilustra la relación entre el orden de la FRFT y la distancia de propagación en el medio GRIN.

donde x es la distancia al eje óptico. Los modos propios de un medio GRIN cuadrático son las funciones de Hermite-Gauss [14]; éstas forman un conjunto ortogonal y completo [15]. El miembro l de este conjunto puede expresarse como

$$\Psi_l(x) = H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{\omega^2} \right), \quad (\text{II.4})$$

donde H_l es el polinomio de Hermite de orden l que está dado por

$$H_l(x) = (-1)^l \exp(x^2) \frac{d^l}{dx^l} \exp(-x^2), \quad (\text{II.5})$$

y la constante ω depende de los parámetros del medio

$$\omega = (2/k)^{1/2} (n_1/n_2)^{1/4}, \quad (\text{II.6})$$

con $k = 2\pi n_1/\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la radiación incidente. Las funciones de Hermite-Gauss para los primeros órdenes se ilustran en la Figura II.3.

Cada modo de Hermite-Gauss se propagará a través del medio GRIN con una

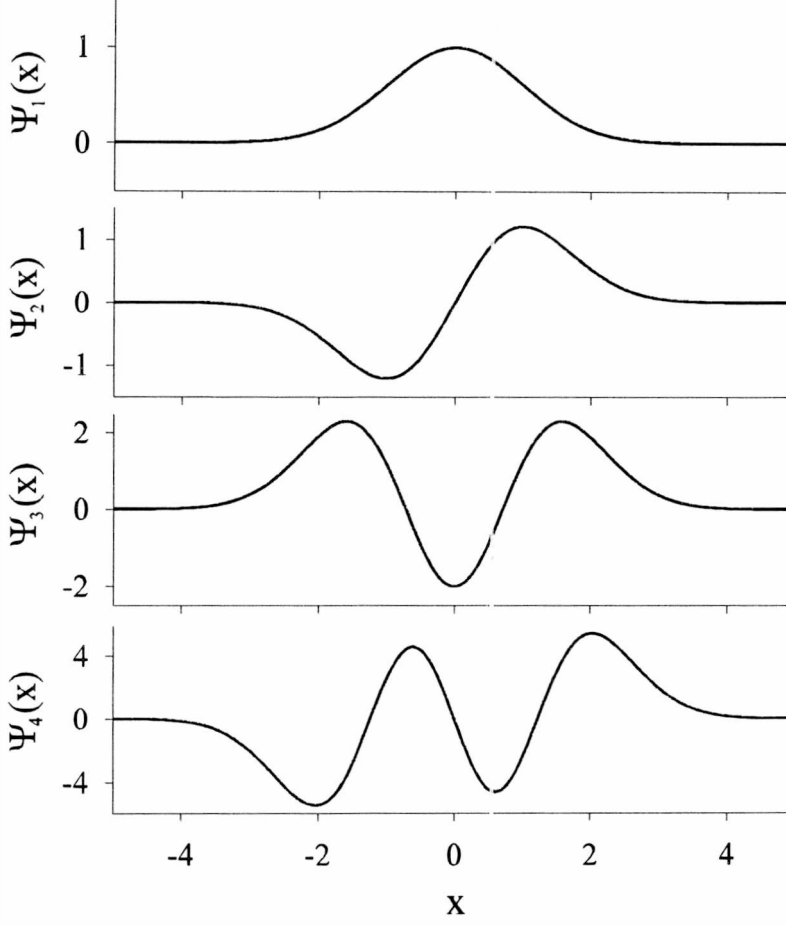


Figura II.3: Primeros órdenes de las funciones de Hermite-Gauss.

constante de propagación dada por

$$\beta_l = k \left[1 - \left(\frac{2}{k} \right) (n_1/n_2)^{1/2} (l + 1/2) \right]^{1/2} \quad (\text{II.7a})$$

$$\approx k - (n_1/n_2)^{1/2} (l + 1/2), \quad (\text{II.7b})$$

y la expresión del campo que se propaga para un determinado modo es:

$$E_l(x, z) = \Psi_l(x) \exp(i\beta_l z). \quad (\text{II.8})$$

Debido a que las funciones de Hermite-Gauss forman un conjunto ortogonal y completo, cualquier función unidimensional $u(x)$ puede descomponerse en esta base de la

siguiente forma

$$u(x) = \sum_l A_l \Psi_l(x), \quad (\text{II.9})$$

con

$$A_l = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) [\Psi_l(x)/h_l] dx, \quad (\text{II.10})$$

donde $h_l = 2^l l! \sqrt{\pi} \omega^2 / \sqrt{2}$. De esta manera, el operador para la FRFT de orden p aplicado a una función $f(x)$ puede expresarse

$$\mathcal{F}^p[u(x)] = \sum_l A_l \Psi_l(x) \exp(i\beta_l p L). \quad (\text{II.11})$$

Como se dijo anteriormente, la extensión al caso de señales bidimensionales es directa y por lo tanto solo daremos la expresión del operador, que para este caso tiene la forma:

$$\mathcal{F}^p[v(x, y)] = \sum_l \sum_m A_{lm} \Psi_{lm}(x, y) \exp(i\beta_{lm} p L),$$

con

$$\Psi_{lm}(x, y) = H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right),$$

$$A_{lm} = \iint_{-\infty}^{\infty} v(x, y) [\Psi_{lm}(x, y)/h_{lm}] dx dy,$$

$$\beta_{lm} = k \left[1 - \left(\frac{2}{k}\right) (n_1/n_2)^{1/2} (l + m + 1/2) \right]^{1/2},$$

donde $h_{lm} = 2^{(l+m)} l! m! \pi \omega^2 / 2$. Siguiendo los lineamientos de esta definición, puede realizarse un procesador óptico para obtener la FRFT con una pieza de material GRIN que tenga una longitud acorde al orden de la FRFT deseada. Así, es necesario cambiar la pieza de medio GRIN para cambiar el orden p de la transformada a la salida del procesador. Sin embargo es posible evitar esto último mediante el empleo de procesadores como los descritos en la Ref. [22]. Estos procesadores contienen varias piezas GRIN colocadas una a continuación de otra, pudiendo seleccionarse el orden de la FRFT obtenida a la salida, variando la distancia relativa entre las diferentes piezas. La ventaja de trabajar con materiales GRIN es que los dispositivos con ellos realizados, por tener pequeñas dimensiones, son aptos para aplicaciones de óptica integrada.

II.3 Definición basada en la WDF

II.3.1 Algunas propiedades de la WDF

La función de distribución de Wigner fue introducida en el contexto de la mecánica cuántica por Wigner en el año 1932 [16]. Con posterioridad fue utilizada ampliamente por diversos autores en el análisis de señales y sistemas ópticos [17, 18, 19] y formación de imágenes [20, 21]. Se discutirán brevemente algunas de sus propiedades.

La WDF de una función unidimensional $u(x)$ se define como

$$W(x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x + x'/2) u^*(x - x'/2) \exp(-2\pi i x' \nu) dx', \quad (\text{II.12})$$

o bien

$$W(x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\nu + \nu'/2) U^*(\nu - \nu'/2) \exp(2\pi i \nu' x) d\nu', \quad (\text{II.13})$$

donde $U(\nu)$ es la transformada de Fourier de $u(x)$ dada por

$$U(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(-2\pi i \nu x) dx. \quad (\text{II.14})$$

Como puede verse en las Ecs. (II.12) y (II.13), la WDF esta definida en el espacio de las fases (coordenada-frecuencia espacial) que duplica en dimensión al espacio donde está definida la función $u(x)$. Como lo muestra su doble definición, la WDF es una representación mixta pues contiene información de la función misma (información espacial), como de su transformada de Fourier (información espectral). Las proyecciones de la WDF tienen significados físicos concretos:

$$\text{Intensidad} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \nu) d\nu = |u(x)|^2, \quad (\text{II.15a})$$

$$\text{Intensidad espectral} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \nu) dx = |U(\nu)|^2, \quad (\text{II.15b})$$

$$\text{Energía} \longrightarrow \iint_{-\infty}^{\infty} W(x, \nu) dx d\nu = E_t, \quad (\text{II.15c})$$

donde E_t es la energía total de la señal. Salvo por un factor de fase constante, la transformada inversa de Wigner es única. La función $u(x)$ y su transformada de Fourier

$U(\nu)$, pueden expresarse en función de la WDF haciendo uso de la transformación inversa como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, \nu) \exp(4\pi i \nu x) d\nu = u(2x)u^*(0), \quad (\text{II.16a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, \nu) \exp(-4\pi i \nu x) dx = U(2\nu)U^*(0), \quad (\text{II.16b})$$

donde $u(0)$ y $U(0)$ son los factores de fase indeterminados mencionados anteriormente.

Existen ciertas transformaciones de la señal, en su espacio de definición, que pueden ser descritas en el espacio de las fases como transformaciones afines de las coordenadas. Así, integrales complicadas, pueden ser estudiadas como simples cambios de coordenadas en el espacio de las fases. Tres de estas transformaciones son de particular interés en óptica por lo que las analizaremos brevemente; éstas son: el pasaje a través de una lente esférica, la propagación en el espacio libre o transformación de Fresnel y la transformada de Fourier [9]. Una transformación afín, puede expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad (\text{II.17})$$

con la condición que el módulo del determinante de la transformación tome el valor unidad

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \pm 1, \quad (\text{II.18})$$

ésto significa geométricamente que el dominio de definición de la WDF puede deformarse pero no cambiar de volumen, lo que se interpreta como conservación de la información. Como ν es una frecuencia espacial introducimos, como es usual en óptica, las coordenadas del plano de Fourier de un transformador típico.

$$\xi = \lambda f_1 \nu, \quad (\text{II.19})$$

donde λ es la longitud de onda de iluminación y f_1 es la distancia focal del transformador a la que consideraremos fija. El pasaje de un campo luminoso de un plano inmediatamente anterior a un plano inmediatamente posterior de una lente esférica

puede describirse como

$$u(x) \longrightarrow u_L(x) = u(x) \exp \left(-i\pi x^2 / \lambda f \right), \quad (\text{II.20})$$

donde f es la distancia focal de la lente en cuestión. El cambio producido en la WDF de la señal ante esta transformación esta dado por

$$W(x, \xi) \longrightarrow W_L(x, \xi) = W(x, \xi + Qx), \quad (\text{II.21})$$

donde

$$Q = f_1 / f, \quad (\text{II.22})$$

es una constante que relaciona las dos distancias focales. La matriz de la transformación en el dominio de la WDF es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.23})$$

Admitiendo que antes de la transformación el dominio de la WDF en el espacio de las fases es un rectángulo, después de la transformación éste se distorsionará manteniendo el área invariable como lo muestra la Figura II.4(a). La segunda operación es la propagación en el espacio libre una distancia z , ésta se puede escribir en el dominio espectral como

$$U(\nu) \longrightarrow U_z(\nu) = U(\nu) \exp \left(-i\pi \lambda z \nu^2 \right), \quad (\text{II.24})$$

y en el dominio de la WDF la transformación es

$$W(x, \xi) \longrightarrow W_z(x, \xi) = W(x - R\xi, \xi), \quad (\text{II.25})$$

donde la constante R es

$$R = z' / f_1 \quad (\text{II.26})$$

y la correspondiente matriz de transformación es

$$\begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.27})$$

Esta matriz describe la transformación ilustrada en la Figura II.4(b). Por último, la transformación de Fourier rota un ángulo de $\pi/2$ al dominio de la WDF como se

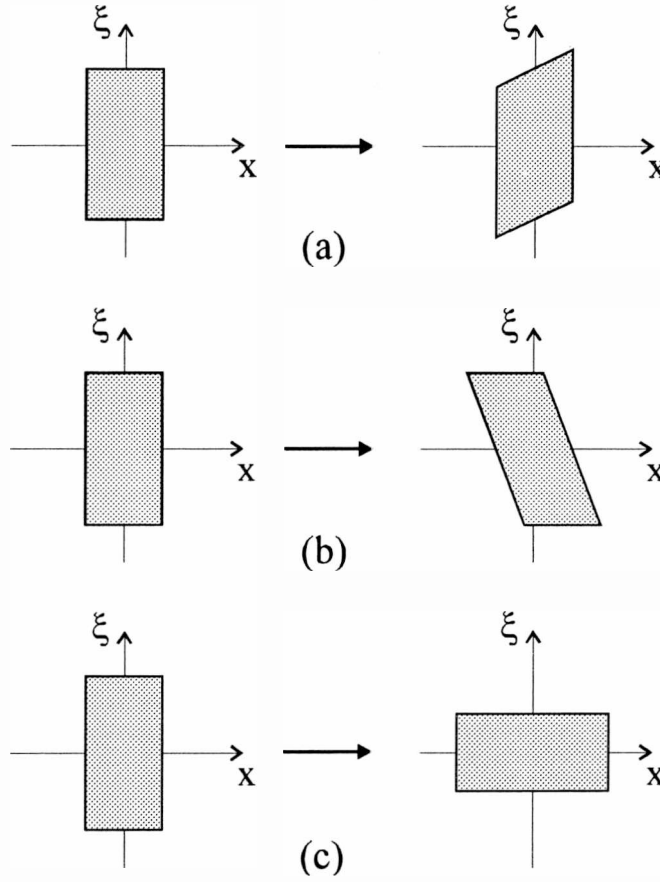


Figura II.4: Cambios en el dominio de la WDF producidos por transformaciones de la señal: (a) pasaje a través de una lente esférica, (b) propagación en el espacio libre, (c) transformación de Fourier.

muestra en la Figura II.4(c). Para este último caso la transformación de coordenadas es:

$$\begin{aligned} u(x) &\longrightarrow U(\nu) \\ W(x, \xi) &\longrightarrow W_F(x, \xi) = W(-\xi, x), \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

y la matriz correspondiente

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.29})$$

II.3.2 Definición de la FRFT

Como hemos visto anteriormente, el efecto que produce la transformación de Fourier de una señal sobre el dominio de la WDF asociada, es su rotación en un ángulo de $\pi/2$. Esto motiva a definir a la FRFT, en forma indirecta, como la transformación de la señal que produce una rotación de la WDF un ángulo igual a una fracción de $\pi/2$, que es la rotación producida por una transformación de Fourier ordinaria [9]. La transformada de Fourier fraccionaria de una función unidimensional

$$\mathcal{F}^p \{u(x)\} = u_p, \quad (\text{II.30})$$

queda así definida por el efecto de rotación que produce sobre la WDF de la señal en su dominio bidimensional de definición (x, ξ) , en notación matricial la transformación de coordenadas en el espacio de las fases es:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \phi - \xi \sin \phi \\ x \sin \phi + \xi \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (\text{II.31})$$

El ángulo de rotación está relacionado con el orden fraccionario de la FRFT por

$$\phi = p\pi/2, \quad (\text{II.32})$$

con p un número real. Los casos particulares de $p = 1$ y $p = 0$ corresponden a la rotación en $\phi = \pi/2$ y $\phi = 0$, que coinciden con la transformación de Fourier ordinaria y a la transformación identidad respectivamente

$$\mathcal{F}^1 \{u(x)\} = u_1 = U(\nu) \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.33})$$

$$\mathcal{F}^0 \{u(x)\} = u_0 = u(x) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.34})$$

Es importante destacar que por estar directamente relacionado el orden fraccionario p con el ángulo de rotación ϕ , la conmutatividad y aditividad de los índices de la transformada se reduce a la de aditividad y conmutatividad de ángulos en el plano.

Basada en esta definición, la FRFT puede ser implementada utilizando el siguiente algoritmo:

$$u(x) \longrightarrow W_0(x, \xi), \quad (\text{II.35a})$$

$$W_0(x, \xi) \longrightarrow W_p(x, \xi), \quad (\text{II.35b})$$

$$W_p(x, \xi) \longrightarrow u_p(x). \quad (\text{II.35c})$$

Los tres pasos del algoritmo son: i) transformación de Wigner de la señal, Ec. (II.35a), ii) rotación de la WDF en el espacio de las fases de acuerdo con la Ec. (II.35b) y iii) transformada inversa de Wigner para obtener la transformada de Fourier fraccionaria, Ec. (II.35c). Si bien mediante el algoritmo anterior puede sintetizarse la FRFT, la implementación óptica de las etapas descriptas resulta demasiado compleja debido en gran parte a la bilinealidad de la WDF [18, 19].

Una forma de implementar ópticamente la FRFT es descomponer la matriz de rotación en un producto de matrices que representen transformaciones de la señal fáciles de implementar en el laboratorio. Toda rotación puede descomponerse en tres operaciones de cizalladura sucesivas, como se ilustra en la Figura II.5. Una de las posibles combinaciones es:

$$(x_0, \xi_0) \longrightarrow (x_1, \xi_1) = (x_0 - A\xi_0, \xi_0), \quad (\text{II.36a})$$

$$(x_1, \xi_1) \longrightarrow (x_2, \xi_2) = (x_1, \xi_1 + Bx_1), \quad (\text{II.36b})$$

$$(x_2, \xi_2) \longrightarrow (x_3, \xi_3) = (x_2 - C\xi_2, \xi_2), \quad (\text{II.36c})$$

o bien en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.37a})$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.37b})$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.37c})$$

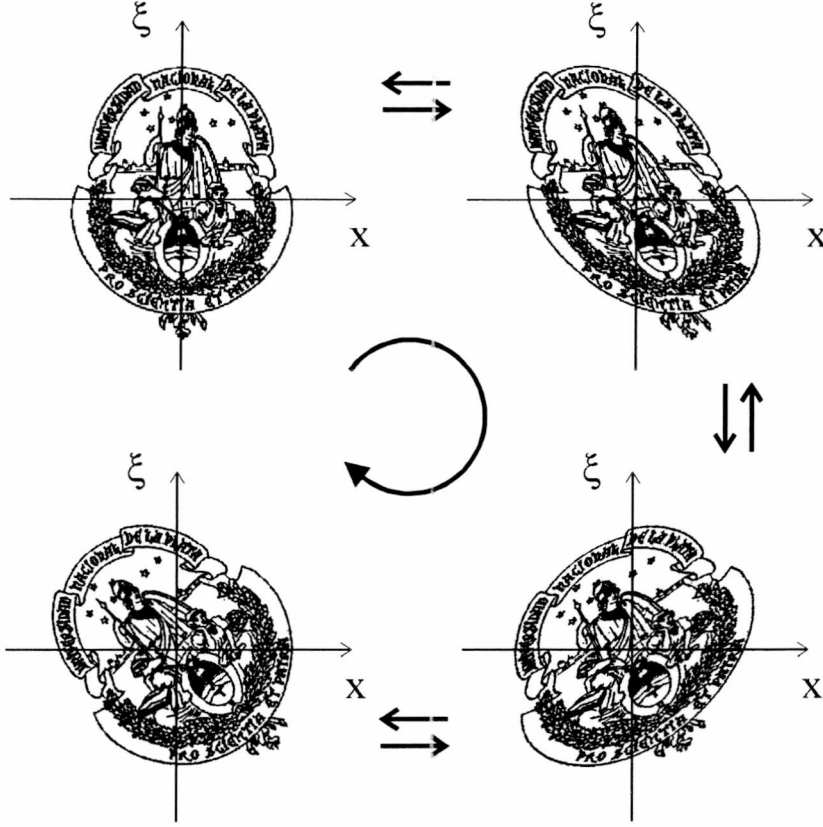


Figura II.5: Rotación de una figura mediante la sucesión de tres operaciones de cizalladura.

La transformación completa puede expresarse con una sola matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 - CB & ABC - A - C \\ B & 1 - AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.38})$$

Para que ésta sea una matriz de rotación, como la de la Ec. (II.31), las constantes A , B y C deben cumplir las siguientes condiciones:

$$B = \sin \phi, \quad A = C = \tan(\phi/2). \quad (\text{II.39})$$

Las Ecs. (II.37a), (II.37b) y (II.37c) representan operaciones de cizalladura a lo largo de los ejes x , ξ y x respectivamente. Otra forma de obtener una rotación en el plano (x, ξ) es realizar estas tres operaciones de cizalladura en diferente orden, a

saber: primero en ξ , luego en x y finalmente en ξ . La segunda transformación es

$$(x_0, \xi_0) \longrightarrow (x_1, \xi_1) = (x_0, \xi_0 + ax_0), \quad (\text{II.40a})$$

$$(x_1, \xi_1) \longrightarrow (x_2, \xi_2) = (x_1 - b\xi_1, \xi_1), \quad (\text{II.40b})$$

$$(x_2, \xi_2) \longrightarrow (x_3, \xi_3) = (x_2, \xi_2 + cx_2), \quad (\text{II.40c})$$

cuya matriz la podemos expresar como:

$$\begin{bmatrix} 1 - ab & -b \\ a + c - abc & 1 - cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.41})$$

Análogamente obtenemos los valores para las constantes a , b y c como:

$$b = \text{sen } \phi, \quad a = c = \tan(\phi/2). \quad (\text{II.42})$$

Las matrices de las Ecs. (II.37a), (II.37b) y (II.37c) y las del segundo miembro de la Ec. (II.41) tienen la misma forma que las matrices de las Ecs. (II.23) y (II.27). Por lo tanto, las operaciones que descomponen la rotación de la WDF en el espacio de las fases representan físicamente el pasaje de luz a través de lentes esféricas y la propagación luminosa en el espacio libre. Las dos formas posibles de realizar una rotación de la WDF pueden llevarse a cabo ópticamente, dando lugar a sendas configuraciones ópticas que se corresponden con los arreglos ópticos de la Figuras II.6 y II.7. En el primero de ellos, la sucesión de operaciones ópticas es: propagación-lente-propagación. Las constantes de la Ec. (II.39), y por lo tanto el orden de la transformada p , se relacionan con los parámetros del sistema óptico mediante las Ecs. (II.22) y (II.26), resultando:

$$\text{tipo I) } \quad A = R = \tan(\phi/2), \quad B = Q = \text{sen } \phi. \quad (\text{II.43})$$

En el segundo sistema óptico las operaciones son: lente-propagación-lente y tenemos

$$\text{tipo II) } \quad a = Q = \tan(\phi/2), \quad b = R = \text{sen } \phi. \quad (\text{II.44})$$

En ambos arreglos, al variar el orden de la FRFT, varía tanto la focal f de las lentes involucradas como las distancias de las propagaciones z . Esto es así, pues el parámetro

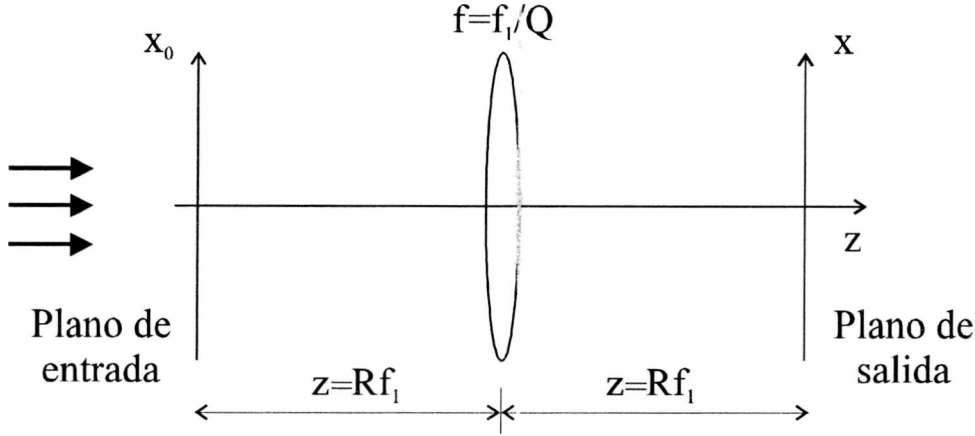


Figura II.6: Sistema óptico (tipo I) para generar la transformada de Fourier fraccionaria bidimensional. Los parámetros R y Q están relacionados con el orden p mediante las ecuaciones: $R = \tan(\phi/2)$ y $Q = \sin \phi$.

de escala λf_1 debe permanecer constante para todos los órdenes fraccionarios. Variar experimentalmente las distancias involucradas en los sistemas ópticos no es tan problemático como modificar las distancias focales de las lentes utilizadas. Por esta razón, para que los procesadores ópticos tipo I y II sean versátiles, es necesario modificarlos para poder variar fácilmente la distancia focal efectiva, introduciendo por ejemplo, lentes zoom [22].

Es posible obtener explícitamente un operador para la FRFT a partir de la sucesión de operaciones en los arreglos experimentales de las Figuras II.6 y II.7. Si $u_0(x_0)$ es el campo escalar complejo de entrada en el sistema óptico de la Figura II.7, se modificará en cada etapa según las siguientes ecuaciones:

$$u_0(x_0) \longrightarrow u_1(x_0) = u_0(x_0) \exp \left[- (i\pi/\lambda f_1) Q x_0^2 \right], \quad (\text{II.45})$$

$$U_1(\xi) \longrightarrow U_2(\xi) = U_1(\xi) \exp \left[- (i\pi/\lambda f_1) R \xi^2 \right], \quad (\text{II.46})$$

$$u_2(x) \longrightarrow u_p(x) = u_2(x) \exp \left[- (i\pi/\lambda f_1) Q x_0^2 \right], \quad (\text{II.47})$$

donde

$$U_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_0) \exp \left[- (2\pi i/\lambda f_1) x_0 \xi \right] dx_0, \quad (\text{II.48})$$

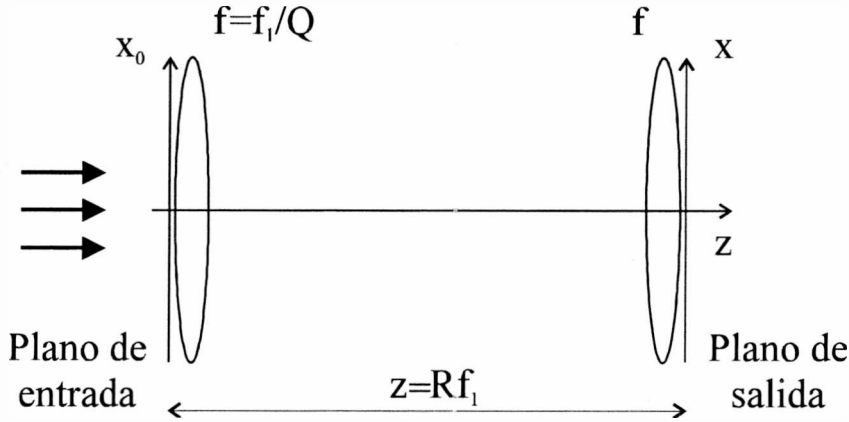


Figura II.7: Sistema óptico (tipo II) para generar la transformada de Fourier fraccionaria bidimensional. Los parámetros R y Q están relacionados con el orden p mediante las ecuaciones: $Q = \tan(\phi/2)$ y $R = \sec \phi$.

y

$$u_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U_2(\xi) \exp \left[(2\pi i / \lambda f_1) x \xi \right] d\xi. \quad (\text{II.49})$$

Combinando este grupo de ecuaciones se obtiene el operador de la transformada de Fourier fraccionaria, que relaciona los campos a la entrada y a la salida del sistema óptico:

$$\begin{aligned} u_p(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan \phi} (x_0^2 + x^2) \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \sin \phi} x_0 x \right] dx_0. \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Es posible hallar la expresión del operador inverso realizando una rotación de la WDF en sentido contrario al realizado para obtener la Ec. (II.50). La transformación inversa queda definida por

$$\begin{aligned} u_0(x_0) = & \int_{-\infty}^{\infty} u_p(x) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan(-\phi)} (x_0^2 + x^2) \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \sin(-\phi)} x_0 x \right] dx, \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

donde debe notarse el reemplazo de ϕ por $-\phi$. La generalización del operador para funciones bidimensionales es directa, debido a que la descomposición de la matriz

de rotación puede efectuarse sin importar el número de dimensiones del espacio [9]. Una definición equivalente a la presentada en esta sección, la transformada de Fourier angular, fué realizada por L. Almeida en las Refs. [23, 24]

II.4 Compatibilidad entre definiciones y propiedades

En esta sección se compararán las definiciones ópticas de la FRFT dadas anteriormente, se analizará su compatibilidad y se estudiarán sus propiedades más importantes.

II.4.1 Compatibilidad

A pesar de que las dos definiciones ópticas de la FRFT analizadas en las secciones II.2 y II.3 tienen orígenes físicos diferentes, ambas son totalmente equivalentes. En estas definiciones aparecen constantes que tienen relación con el entorno físico utilizado. En el operador de la FRFT basada en el medio GRIN, aparece la constante ω definida por la Ec. (II.6) que es función de los parámetros físicos del medio GRIN, n_1 y n_2 . A su vez, en la definición basada en la WDF aparece el parámetro λf_1 que está asociado al campo que se propaga y a la escala de la transformada de Fourier ordinaria. Es interesante establecer una relación entre estos parámetros para así poder comparar procesadores ópticos basados en las diferentes definiciones. La compatibilidad entre ambas definiciones fue demostrada en la Ref. [26] utilizando el principio matemático de inducción completa. De uno de los pasos de esta demostración se obtiene

$$\frac{\lambda^2 f_1^2 R^2}{\pi^2 \omega^4} + \left(Q - \frac{1}{R}\right)^2 R^2 = 1. \quad (\text{II.52})$$

Utilizando los valores de R y Q dados por la Ec. (II.44) puede entonces hallarse

$$\omega^2 = \frac{\lambda f_1}{\pi},$$

que relaciona un medio GRIN cuadrático caracterizado por el parámetro ω con el sistema óptico (tipo II) de la Figura II.7. Si en cambio, se quieren utilizar como

parámetros del medio GRIN, n_1 y L , haciendo uso de la Ecs. (II.2) y (II.6), obtenemos [22]

$$f_1 = L \frac{2}{\tau n_1}. \quad (\text{II.53})$$

II.4.2 Propiedades de la FRFT

Existen dos postulados básicos que debe cumplir la transformada de Fourier fraccionaria y pueden enunciarse como propiedades. Estos fueron mencionados al comienzo del Capítulo II y verificados para ambas definiciones. El primero es la coincidencia entre la transformada de Fourier fraccionaria con la transformada de Fourier ordinaria cuando el orden fraccionario de la primera toma el valor unidad, esto es

$$u_p(y) \rightarrow \mathcal{F}^1 u(x) = u_1(y), \quad \text{cuando} \quad p \rightarrow 1. \quad (\text{II.54})$$

El segundo es la conmutatividad y aditividad de los órdenes fraccionarios, lo que permite componerlas sin importar el orden, esta propiedad puede resumirse como

$$\mathcal{F}^{(c_1 p_1 + c_2 p_2)} u(x) = \mathcal{F}^{(c_1 p_1)} \mathcal{F}^{(c_2 p_2)} u(x) = \mathcal{F}^{(c_2 p_2)} \mathcal{F}^{(c_1 p_1)} u(x). \quad (\text{II.55})$$

Otra propiedad que puede demostrarse fácilmente de las expresiones para los operadores de la FRFT expresados por las Ecs. (II.11) y (II.50) es la linealidad, por la cual

$$\mathcal{F}^p [c_1 u(x) + c_2 v(x)] = c_1 \mathcal{F}^p u(x) + c_2 \mathcal{F}^p v(x). \quad (\text{II.56})$$

De las ecuaciones mencionadas arriba, también pueden obtenerse las relaciones de periodicidad que exhibe la FRFT, estas son:

$$\mathcal{F}^{p+4} u(x) = \mathcal{F}^p u(x), \quad (\text{II.57a})$$

$$\mathcal{F}^{p+2} u(x) = \mathcal{F}^p u(-x). \quad (\text{II.57b})$$

De estas dos ecuaciones se puede observar que el período en el orden fraccionario de la FRFT es de 4, y que, excepto una inversión de coordenadas, toda la información de la FRFT puede ser obtenida para los órdenes en el intervalo $0 \leq p \leq 2$ o equivalente. Si además la función es real, es decir que verifica $u(x) = u^*(x)$, este intervalo puede reducirse a $0 \leq p \leq 1$.

A efecto de ilustrar el comportamiento de la FRFT, se enunciarán a continuación algunos de los teoremas más importantes. En el Apéndice A, se realiza una breve presentación de la definición puramente matemática de la FRFT y se muestra el efecto del operador en algunas funciones sencillas.

Generalización del teorema de Parseval

El teorema de Parseval, que comunmente se lo interpreta en el sentido de la conservación de la energía de la señal, puede generalizarse a la FRFT de la forma

$$\int u(x)v^*(x)dx = \int u_p(y)v_p^*(y)dy, \quad (\text{II.58})$$

que en el caso de tratarse de la misma señal se puede escribir como

$$\int |u(x)|^2 dx = \int |u_p(y)|^2 dy. \quad (\text{II.59})$$

El hecho de que las funciones de Wigner de la señal y de su transformada estén relacionadas por una operación conservativa en el espacio de las fases, como lo es la rotación, permite anticipar la validez de una generalización del teorema de Parseval. En el Apéndice B, se da una demostración formal de su validez.

La FRFT ante traslaciones

Una forma de comprender como actúa una transformación, es conocer el efecto que producen sobre ésta algunos cambios en la señal. Uno de estos cambios es la traslación en las coordenadas espaciales, que puede ser expresada de la siguiente manera

$$u(x) \longrightarrow u(x + \alpha). \quad (\text{II.60})$$

La FRFT de la señal trasladada, $u_p^\alpha(y)$, se relaciona con la FRFT de la señal original, $u_p(y)$, mediante la siguiente igualdad

$$u_p^\alpha(y) = \exp \left[\frac{i\pi\alpha}{\lambda f_1} \sin \phi (2y + \alpha \cos \phi) \right] u_p(y + \alpha \cos \phi), \quad (\text{II.61})$$

de la cual se presenta una demostración en el Apéndice B. Puede notarse que una traslación en el dominio de las coordenadas produce una traslación en el dominio

de la FRFT y la aparición de un factor de fase. Cuando el orden fraccionario toma el valor unidad, $p = 1$ o $\phi = \pi/2$, esta igualdad se convierte en la conocida expresión para la transformada de Fourier ordinaria

$$u_1^\alpha(y) = \exp \left[\frac{2i\pi\alpha y}{\lambda f_1} \right] u_1(y). \quad (\text{II.62})$$

La FRFT ante cambios de escala

El efecto que produce sobre la FRFT el cambio de escala en la señal de entrada es de gran importancia en óptica, debido a la facilidad con que las lentes esféricas lo producen. Un cambio de escala

$$u(x) \longrightarrow u(\alpha x),$$

produce una variación en la transformada de Fourier fraccionaria dada por:

$$u_p^\alpha(y) = \frac{1}{\alpha} \Psi u_{\bar{p}} \left(\frac{y}{\sqrt{1/\alpha^2 + \sin^2 \phi (\alpha^2 - 1/\alpha^2)}} \right), \quad (\text{II.63})$$

con

$$\Psi = \exp \left[\frac{i\pi y^2 (\alpha^4 - 1)}{\lambda f_1 (\alpha^4 \tan \phi + 1/\tan \phi)} \right], \quad (\text{II.64})$$

y

$$\bar{p} = \frac{2}{\pi} \arctan \left[\alpha^2 \tan (p\pi/2) \right]. \quad (\text{II.65})$$

Es decir, la FRFT de orden p de la función modificada es igual a FRFT de la función original pero con un orden fraccionario \bar{p} diferente, en una escala distinta y multiplicada por un factor de fase cuadrático. Cuando el orden fraccionario toma el valor uno, el factor de fase de la Ec. (II.64) se hace igual a la unidad y los órdenes fraccionarios p y \bar{p} , se hacen iguales, quedando la Ec. (II.33) de la forma

$$u_1^\alpha(y) = \frac{1}{\alpha} u_1 \left(\frac{y}{\alpha} \right), \quad (\text{II.66})$$

que es la expresión del teorema de cambio de escala para la transformada de Fourier ordinaria. En el caso particular en que $\alpha = 1$, la Ec. (II.63) se convierte en una identidad

$$u_p^1(y) = u_p(y), \quad (\text{II.67})$$

pues el factor de fase de la Ec. (II.64) también se hace uno. Una demostración de este teorema puede encontrarse en el Apéndice B.

Teorema de la derivada

Por último, un teorema conocido en el formalismo de la transformada de Fourier, es el de la derivada. Este relaciona a la transformada de Fourier de la derivada de una función con la transformada de Fourier de la función misma. La generalización para el caso de la FRFT es la siguiente:

$$\mathcal{F}^p u'(x) = u'_p(y) \cos \phi + u_p(y) \frac{2\pi i y}{\lambda f_1} \sin \phi, \quad (\text{II.68})$$

la que en forma explícita puede escribirse como

$$\begin{aligned} \int u'(x) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan \phi} (x^2 + y^2) \right] \exp \left(-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \sin \phi} xy \right) dx = \\ = u'_p(y) \cos \phi + u_p(y) \frac{2\pi i y}{\lambda f_1} \sin \phi, \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

donde $u'(x)$ es la primera derivada de la función $u(x)$.

En el caso en que $p = 1$, la expresión anterior toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^1 u'(x) &= u_1(y) \frac{2\pi i y}{\lambda f_1} \\ &= \frac{2\pi i y}{\lambda f_1} \mathcal{F}^1 u(x). \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

En el Apéndice B se demuestra la validez de la Ec. (II.69).

Capítulo III

La FRFT y los patrones de difracción de Fresnel

III.1 Introducción

La propagación de luz en el espacio libre, puede ser analizada como un proceso continuo de transformación de Fourier de orden fraccionario. A medida que el campo luminoso se propaga, el orden de la FRFT representada por el campo se incrementa desde cero hasta tomar el valor unidad. Estos valores extremos coinciden con la apertura difractante en el primer caso y con la transformada de Fourier ordinaria asociada a la difracción de campo lejano en el segundo. Este comportamiento hace posible relacionar a los patrones de difracción de Fresnel con la FRFT. Los primeros trabajos en tratar este tema se deben a Pellat-Finet et al. [27, 28] y a Abe et al. [29]. Más tarde Ozaktas et al. [30] analizan varios sistemas ópticos transformadores de Fourier fraccionarios y estudian la relación entre la FRFT y la propagación en el espacio libre.

En la segunda sección de este capítulo se hace una breve revisión de la teoría escalar de la difracción para luego describir la difracción de Fresnel como una transformación de Fourier fraccionaria de la pupila difractante, resultado obtenido de manera independiente en la Ref [31]. En la tercera y cuarta sección se propone un procesador para realizar la FRFT de una transparencia bidimensional sin elementos refractivos, utilizando solo propagación del campo luminoso, y se presenta una aplicación de la

FRFT al filtrado espacial en la región de Fresnel.

III.2 La difracción en la región de Fresnel.

En muchas situaciones la descripción de la propagación del campo luminoso mediante el formalismo de la óptica geométrica no es suficiente. Esto es así porque esta teoría no tiene en cuenta los efectos de difracción. El estudio de la propagación y difracción de luz monocromática por aperturas finitas puede ser llevado a cabo en el marco de la teoría escalar de la difracción. La validez de esta teoría está garantizada siempre que se verifiquen las siguientes condiciones: i) que la dimensión característica de la apertura difractante sea grande respecto a la longitud de onda de la radiación incidente, ii) que los puntos de observación se encuentren suficientemente alejados de la apertura difractante. Con estas restricciones, los resultados de esta teoría son lo suficientemente exactos como para tratar a la radiación luminosa como un fenómeno escalar y no tener en cuenta el acoplamiento de los vectores eléctrico y magnético del campo. Un tratamiento detallado del fenómeno de propagación y difracción de la luz puede ser encontrado en la Refs. [32, 3, 33]. Consideremos la propagación de un frente de onda arbitrario desde el plano en el que se encuentra una transparencia de transmitancia $t(x_0, y_0)$ (plano objeto) y un plano de observación a una distancia z del primero, como lo muestra la Figura III.1. Si la amplitud del campo escalar en el plano de la transparencia está dada por $u_0(x_0, y_0)$, la distribución de amplitud compleja en el plano de observación puede ser calculada utilizando la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld

$$u(x, y; z) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) \left(\frac{z}{i\lambda r^2} \right) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} r\right) dx_0 dy_0, \quad (\text{III.1})$$

donde λ es la longitud de onda de la iluminación monocromática y r es la distancia entre los puntos $P_0 = (x_0, y_0; 0)$ y $P = (x, y; z)$, que está dada por:

$$r = z \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{III.2})$$

Si la distancia z es lo suficientemente grande comparada con las dimensiones de la apertura, pueden hacerse algunas aproximaciones a efectos de simplificar la Ec.

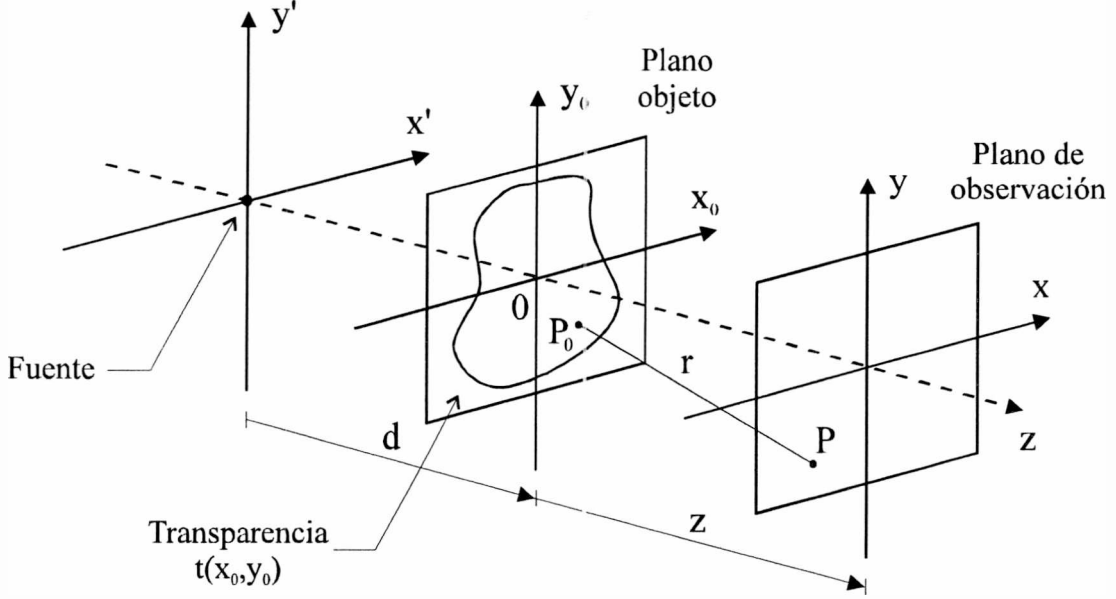


Figura III.1: Esquema de difracción de una onda esférica a través de una transparencia-objeto t .

(III.1). Esta modificación de la fórmula de Rayleigh-Sommerfeld, es conocida como aproximación de Fresnel y resulta válida para propagaciones mayores a una determinada distancia mínima entre la transparencia y el plano de observación. Si la extensión radial máxima de la transparencia es L_1 , esto es:

$$u_0(x_0, y_0) = 0, \quad \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > L_1, \quad (\text{III.3})$$

y si nos restringimos a una región en el plano de observación que verifique $\sqrt{x^2 + y^2} \leq L_2$, el máximo valor que toma la expresión $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$ puede ser escrito como:

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]_{\max.} = (L_1 + L_2)^2. \quad (\text{III.4})$$

Por lo tanto para distancias de propagación que verifiquen

$$z \gg L_1 + L_2, \quad (\text{III.5})$$

el denominador de la onda esférica de la Ec. (III.1) puede aproximarse por:

$$i\lambda z \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z} \right)^2 \right] \cong i\lambda z. \quad (\text{III.6})$$

Para aproximar el término de fase en la Ec. (III.1) se lo desarrolla en serie obteniéndose

$$\frac{2\pi}{\lambda}r = \frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{\pi}{\lambda z} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right] - \frac{\pi}{4\lambda z^3} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right]^2 + \dots \quad (\text{III.7})$$

El tercer término del desarrollo en serie puede acotarse para obtener la condición

$$|z|^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} (L_1 + L_2)^4, \quad (\text{III.8})$$

para la cual, el error cometido en la fase al retener solo los dos primeros términos de su desarrollo en serie es mucho menor que un radián. La fase toma entonces la forma

$$\frac{2\pi}{\lambda}r \cong \frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{\pi}{\lambda z} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right]. \quad (\text{III.9})$$

Las aproximaciones realizadas en las Ecs. (III.6) y (III.9) son conocidas como *aproximaciones de Fresnel* y con ellas, la amplitud del campo escalar puede expresarse como

$$u(x, y, z) = \frac{\exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}z\right)}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right]\right\} dx_0 dy_0. \quad (\text{III.10})$$

La condición de la Ec. (III.8) es usualmente suficiente pero no necesaria para asegurar la validez de la aproximación de Fresnel y el comienzo de la zona de difracción de campo cercano [33]. Para algunas distancias z , pequeñas como para no verificar la Ec. (III.8), el factor de fase cuadrático en la Ec. (III.10) es lo suficientemente grande como para que el argumento de la integral de Fresnel oscile muy rápidamente. En estas condiciones el valor de la integral estará básicamente determinado por las contribuciones de los puntos cercanos a los que mantienen la fase estacionaria. Cerca de esos puntos los valores de los términos desechados en la aproximación de la Ec. (III.7) son frecuentemente despreciables [3, 32].

Si la transparencia $t(x_0, y_0)$, es iluminada por una fuente puntual localizada a una distancia d detrás de ella, la expresión del campo en el plano objeto está dada por

$$u_0(x_0, y_0) = t(x_0, y_0) \exp\left(i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda d}\right), \quad (\text{III.11})$$

donde se ha tomado la aproximación parabólica para representar la onda que ilumina la transparencia. Para esta clase de iluminación, la expresión para el campo escalar en el plano de observación en la aproximación de Fresnel puede escribirse como

$$u(x, y; z) = \frac{\exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} z\right)}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \exp\left[i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{d}\right)\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z} (xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0. \quad (\text{III.12})$$

III.3 La FRFT generada por difracción

El fenómeno de difracción de Fraunhofer, o de campo lejano, está directamente relacionado con la transformada de Fourier. Los patrones de difracción de Fraunhofer de una pupila pueden ser calculados mediante la transformada de Fourier de una función compleja que representa a la pupila. Así como la transformada de Fourier ordinaria es la representación matemática del fenómeno de difracción de Fraunhofer, su generalización, la transformada de Fourier fraccionaria, lo es de los patrones de difracción de Fresnel.

La FRFT de una función pupila bidimensional $t(x_0, y_0)$ puede implementarse mediante sistemas ópticos sencillos. La Figura III.2(a), muestra uno de estos posibles arreglos ópticos, en el que $f = f_1/\sin\phi$ es la distancia focal de la lente L , $Z_0 = f_1 \tan(\phi/2)$ y $\phi = p\pi/2$. La amplitud compleja en el plano de salida del procesador, esto es en el plano $z = 2Z_0$, está dada por:

$$u_p(x, y) = A \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f_1 \tan\phi}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) \exp\left(i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda f_1 \tan\phi}\right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \sin\phi} (x_0 x + y_0 y)\right] dx_0 dy_0, \quad (\text{III.13})$$

donde A y f_1 son constantes, λ es la longitud de onda de la iluminación monocromática, y $u_0(x_0, y_0)$ es la amplitud compleja en el plano $z = 0$. Como el sistema óptico está iluminado por una onda plana, la amplitud compleja en el plano de entrada coincide con la función pupila y por lo tanto:

$$u_0(x_0, y_0) = t(x_0, y_0). \quad (\text{III.14})$$

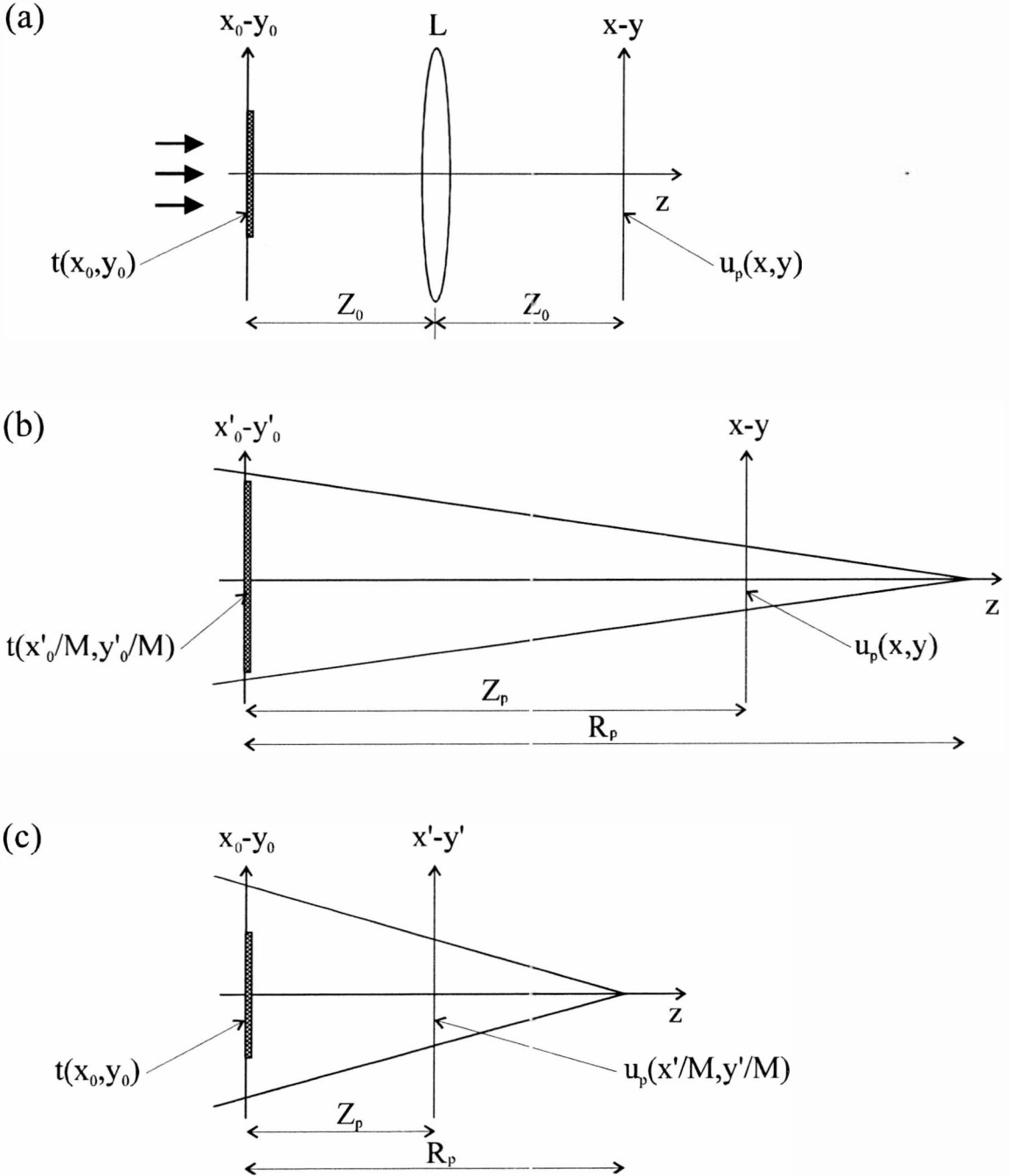


Figura III.2: (a) Arreglo óptico para obtener la transformada de Fourier fraccional. (b) y (c) Configuraciones equivalentes basadas en la difracción de Fresnel en el espacio libre.

La Ec. (III.13), es la versión bidimensional del operador integral de la FRFT de orden fraccionario p dado por la Ec. (II.50).

Para relacionar la Ec. (III.13) con los patrones de difracción en la región de Fresnel de $t(x_0, y_0)$, realizamos las siguientes asignaciones:

$$Z_p = f_1 \tan \phi, \quad (\text{III.15a})$$

$$M = 1/\cos \phi, \quad (\text{III.15b})$$

$$R_p = f_1/(\sin \phi \cos \phi). \quad (\text{III.15c})$$

Realizando el siguiente cambio de coordenadas en el plano objeto

$$x_0 \longrightarrow x'_0/M, \quad (\text{III.16a})$$

$$y_0 \longrightarrow y'_0/M, \quad (\text{III.16b})$$

y reemplazando las Ecs. (III.14) y (III.15) en la Ec. (III.13), obtenemos:

$$\begin{aligned} u_p(x, y) = & \frac{A}{M^2} \exp \left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda Z_p} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} t \left(\frac{x'_0}{M}, \frac{y'_0}{M} \right) \exp \left[i\pi \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{\lambda} \left(\frac{1}{Z_p} - \frac{1}{R_p} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda Z_p} (x'_0 x + y'_0 y) \right] dx'_0 dy'_0. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Haciendo una comparación entre las Ecs. (III.17) y (III.12), se puede concluir que la amplitud compleja $u_p(x, y)$ que representa a la FRFT de orden p de la función pupila $t(x_0, y_0)$, coincide con el patrón de difracción de Fresnel localizado a una distancia Z_p , difractado por una versión magnificada de la pupila $t'(x'_0, y'_0) = t \left(\frac{x'_0}{M}, \frac{y'_0}{M} \right)$ cuando es iluminada con una onda esférica convergente de radio R_p .

Otra forma de vincular a la FRFT con los patrones de difracción de Fresnel de la función pupila, es realizar el cambio de variables sobre las coordenadas del plano de observación, esto es:

$$x \longrightarrow x'/M, \quad (\text{III.18a})$$

$$y \longrightarrow y'/M. \quad (\text{III.18b})$$

Reemplazando nuevamente la Ec. (III.14) junto con:

$$Z_p = f_1 \sin \phi \cos \phi, \quad (\text{III.19a})$$

$$M = \cos \phi, \quad (\text{III.19b})$$

$$R_p = f_1 / \tan \phi, \quad (\text{III.19c})$$

en la Ec. (III.13), obtenemos:

$$\begin{aligned} u_p \left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M} \right) &= A \exp \left(i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda Z_p} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \exp \left[i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{Z_p} - \frac{1}{R_p} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda Z_p} (x_0 x' + y_0 y') \right] dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

De esta manera, puede obtenerse la FRFT de orden p magnificada un factor M por difracción de una onda esférica de radio R_p en la pupila $t(x_0, y_0)$. Por lo tanto es posible generar ópticamente a la FRFT de orden p de una pupila por simple propagación de una onda esférica convergente. Teniendo en cuenta esto último, podemos diseñar un procesador para obtener la FRFT por difracción de Fresnel en el espacio libre con dos variantes. La primera de ellas (A) se basa en la Ec. (III.17), donde los parámetros geométricos están relacionados con el orden p de la FRFT por medio de las Ecs. (III.15). Esta variante se ilustra en la Figura III.2(b) y la variación de los diferentes parámetros con el orden de la FRFT se puede observar en la Figura III.3(a). En la segunda configuración (B), relacionada con la Ec. (III.20), los parámetros geométricos fundamentales están dados por las Ecs. (III.19) cuya variación con p puede apreciarse en la Figura III.3(b). El esquema del procesador en esta última versión se ilustra en la Figura III.2(c). En aplicaciones en las que se requiera la FRFT sin error de escala, debe magnificarse a la función pupila un factor M y utilizarse un procesador óptico en su variante A (ver Figura III.2(b)). Sin embargo para aplicaciones que admitan una variación controlada de la escala a la salida del procesador es más sencillo utilizar la configuración B (ver Figura III.2(c)), pues no requiere ninguna modificación de la función de entrada.

Es posible evitar la variación de escala a la entrada o a la salida en los procesadores anteriormente mencionados, en detrimento de obtener la transformada de Fourier fraccionaria a menos de un factor de fase cuadrático [34]. Si se ilumina la pupila $t(x_0, y_0)$ con una onda esférica convergente de curvatura R_q , la FRFT de

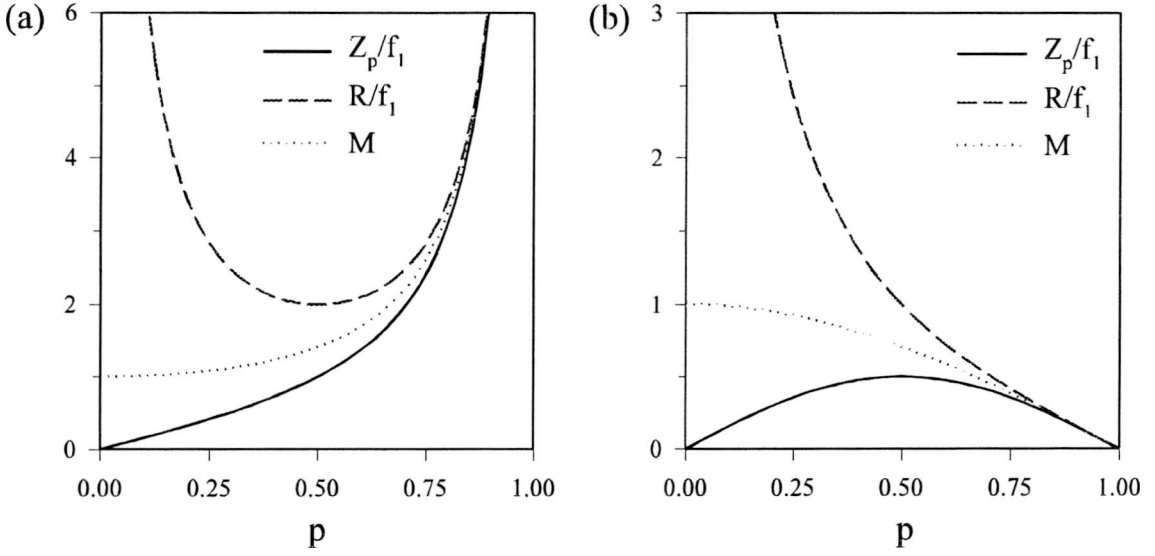


Figura III.3: Variación con el orden de la FRFT de los parámetros geométricos Z_p , R_p , y M en el caso: (a) arreglo A, (b) arreglo B.

orden q puede ser hallada a una distancia Z_q sin error de escala siempre que:

$$R_q = \frac{f_1}{\tan(\varphi/2)}, \quad (\text{III.21a})$$

$$Z_q = f_1 \sin \varphi, \quad (\text{III.21b})$$

con $\varphi = q\pi/2$. Reemplazando las Ecs. (III.21) en la Ec. (III.12), obtenemos el patrón de difracción de Fresnel a una distancia Z_q de la pupila, que es

$$u(x, y; Z_q, R_q) = A \exp \left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f_1 \sin \varphi} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \exp \left(i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda f_1 \tan \varphi} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \sin \varphi} (xx_0 + yy_0) \right] dx_0 dy_0. \quad (\text{III.22})$$

Por lo tanto, a la FRFT de orden q de la pupila t la podemos escribir en función del campo $u(x, y; Z_q, R_q)$ como

$$u_q(x, y) = \exp \left(-i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda R_q} \right) u(x, y; Z_q, R_q). \quad (\text{III.23})$$

Manteniendo fija la curvatura de la onda esférica, no solo podemos hallar por propagación la FRFT de orden q sino todas las FRFT para órdenes entre 0 y 1. Realizando

nuevamente el cambio de variables expresado por las Ecs. (III.18) en la expresión de la FRFT de orden p dada por las Ecs. (III.13) y (III.14), obtenemos:

$$u_p\left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M}\right) = A \exp\left(i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda f_1 M^2 \tan \phi}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) \exp\left(i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda f_1 \tan \phi}\right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 M \sin \phi} (x_0 x' + y_0 y')\right] dx_0 dy_0, \quad (\text{III.24})$$

donde $\phi = p\pi/2$. Relacionando esta última ecuación con el patrón de Fresnel localizado a una distancia Z_p , generado por difracción de la onda esférica de curvatura R_q , y utilizando algunas identidades trigonométricas, podemos escribir

$$Z_p = \frac{f_1 \tan \phi}{1 + \frac{f_1}{R_q} \tan \phi}, \quad (\text{III.25})$$

$$M_p = \frac{1 + \tan \phi \tan(\phi/2)}{1 + \frac{f_1}{R_q} \tan \phi}, \quad (\text{III.26})$$

y la FRFT de orden p la podemos expresar como:

$$u_p\left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M}\right) = \exp\left\{i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda} \left[\frac{R_q(1 - M^2) - Z_p}{Z_p R_q M^2}\right]\right\} u(x', y'; Z_p, R_q). \quad (\text{III.27})$$

Por lo tanto podemos generar la FRFT de orden p , a menos de un factor de fase cuadrático, a una distancia dada por la Ec. (III.25) y con una magnificación dada por la Ec. (III.26). Puede observarse de estas últimas ecuaciones que el error en la escala desaparece si $q = p$, esto es si iluminamos con la onda esférica de curvatura correcta dada por la Ec. (III.21a).

III.4 Aplicación al filtrado espacial en la región de Fresnel

En las aplicaciones de filtrado espacial mediante técnicas ópticas, uno de los fenómenos usualmente utilizados es el efecto Talbot o fenómeno de autoimágenes bajo condiciones de iluminación coherente. El efecto Talbot consiste en la aparición de réplicas de la transparencia difractante a medida que el campo se propaga. Este fenómeno ocurre cuando la iluminación es coherente y la transmitancia iluminada

es periódica. Si iluminamos una red de Ronchi $R(x)$ de período d con una onda plana monocromática de longitud de onda λ las réplicas o autoimágenes positivas aparecerán a las distancias de la apertura difractante dadas por

$$z_\alpha = \frac{2\alpha d^2}{\lambda} = \alpha Z_T \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (\text{III.28})$$

donde

$$Z_T = \frac{2d^2}{\lambda}, \quad (\text{III.29})$$

es conocida como distancia de Talbot. En los planos ubicados a distancias intermedias dadas por

$$z_\alpha = \frac{\alpha Z_T}{2}, \quad (\text{III.30})$$

el campo reproduce a la transmitancia $R(x)$ desplazada en medio período a lo largo del eje x . Esta función desplazada coincide con la función original pero con el contraste invertido por lo que se las llama autoimágenes negativas. En el caso de iluminar la red de Ronchi con una onda esférica monocromática convergente de radio R , las autoimágenes ya no serán replicas exactas de la transparencia iluminada sino que tendrán una variación en la escala. Para este tipo de iluminación, las distancias z a las que están localizadas las autoimágenes verifican [35]

$$\frac{1}{z_\alpha} = \frac{1}{R} + \frac{\lambda}{2\alpha d^2} \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (\text{III.31})$$

En la Figura III.4 se ilustra esquemáticamente la generación de autoimágenes.

Si una transparencia objeto unidimensional $t(\xi)$ está formada por una superposición lineal de estructuras binarias periódicas como redes de Ronchi, puede ser expandida sobre un conjunto de funciones de la siguiente manera

$$t(\xi) = \sum_m a_m \bar{R}(\xi, d_m), \quad (\text{III.32})$$

con

$$\bar{R}(\xi, d_m) = \frac{1}{2} [1 + R_m(\xi)] \text{rect}(\xi/x_0), \quad (\text{III.33})$$

y donde

$$R_m(\xi) = \text{sign} \left[\sin \left(2^{m-1} \pi x / x_0 \right) \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.34})$$

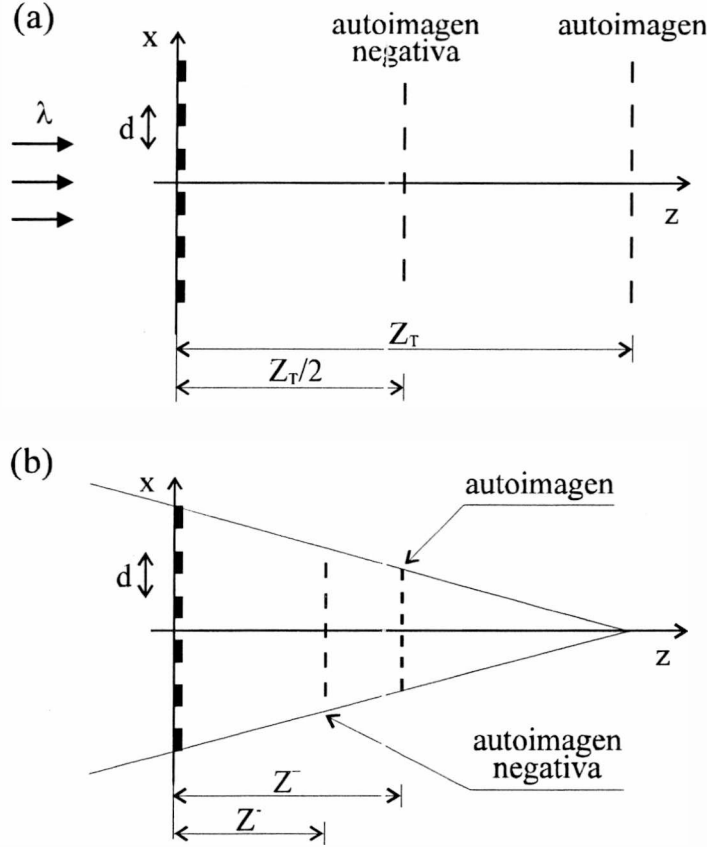


Figura III.4: Esquema de un dispositivo Talbot: (a) Iluminado con una onda plana y donde $Z_T = \frac{2d^2}{\lambda}$. (b) Iluminado por una onda esférica convergente de radio R donde $Z^+ = \frac{RZ_T}{R+Z_T}$, $Z^- = \frac{RZ_T}{2R+Z_T}$.

es la función de Rademacher de orden m cuyo período es

$$d_m = 2^{2-m} x_0. \quad (\text{III.35})$$

Estas funciones describen un tren de 2^{m-1} ciclos rectangulares y están definidas en el intervalo $|\xi| < x_0$ con amplitud $+1$ y -1 , donde la zona con valor nulo es igual a las de valor ± 1 y el período está dado por d_m . Las funciones de Rademacher forman un conjunto ortogonal e incompleto por lo tanto, no forman una base y no todas las funciones pueden ser expandidas en ellas. En la Figura III.5 se ilustran los primeros órdenes de las funciones de Rademacher. El filtrado espacial en la región de Fresnel puede ser realizado colocando a una distancia z de la transparencia a filtrar una réplica

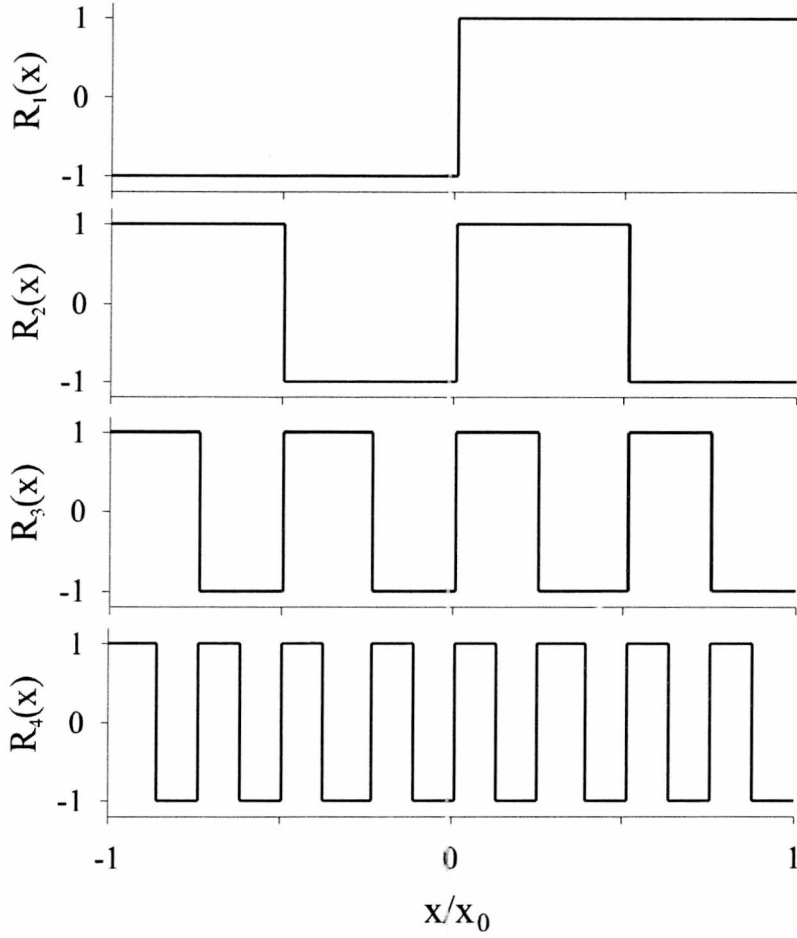


Figura III.5: Primeros órdenes de las funciones de Rademacher

de ésta. Si la distancia z es elegida de tal manera que corresponda a la distancia de Talbot negativa de una cierta función $R_m(\xi)$, la réplica cancelará esta componente en el espectro de Rademacher de la transparencia obteniéndose la imagen filtrada de $t(\xi)$ [36, 37]. El efecto de filtrado en la región de Fresnel puede ser relacionado con el formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria basándonos en la relación entre ésta y los patrones de Fresnel obtenida en la sección anterior. Iluminemos la transparencia $t(\xi)$, dada por la Ec. (III.32), con una onda esférica convergente de radio R en forma análoga a la que se ilustra en la Figura III.4(b). La FRFT de orden p de la transparencia, dada por la Ec. (III.17), estará localizada a una distancia Z_p de

ésta, expresada por la Ec. (III.15a). Aplicando el operador FRFT a $t(\xi)$ obtenemos

$$\mathcal{F}^p \{t(\xi)\} = \sum_m a_m \mathcal{F}^p \left\{ \bar{R}(\xi, d_m) \right\} \quad (\text{III.36a})$$

$$= \sum_m a_m F_{Z_p, R} \left\{ \bar{R}(\xi/M, d_m) \right\}. \quad (\text{III.36b})$$

Donde, como fue mencionado en la sección anterior, la FRFT de orden p de $t(\xi)$ coincide con el patrón de difracción de Fresnel de una versión magnificada de la transparencia bajo iluminación esférica de radio de curvatura R y a una distancia Z_p , denotado por $F_{Z_p, R}\{\}$. Teniendo en cuenta la Ec. (III.31) para las distancias de las autoimágenes bajo iluminación esférica podemos concluir que para $Z_p = z_\alpha$ la transformada de Fourier fraccionaria de orden p de una determinada función de Rademacher $\bar{R}(\xi, d_m)$ coincide con la autoimagen de una versión magnificada de la misma función

$$\mathcal{F}^p \left\{ \bar{R}(\xi, d_m) \right\} = F_{z_\alpha, R} \left\{ \bar{R}(\xi/M, d_m) \right\}, \quad (\text{III.37})$$

donde el cambio de escala implica un cambio en el período de la función:

$$\bar{R}(\xi/M, d_m) = \bar{R}(\xi, d'_m = d_m M). \quad (\text{III.38})$$

De las condiciones de autoimagen para iluminación esférica tenemos que

$$F_{z_\alpha, R} \left\{ \bar{R}(\xi, d'_m) \right\} = \bar{R}(\xi, d''_m), \quad (\text{III.39})$$

donde los períodos se relacionan como

$$d''_m = d'_m \frac{(R - z_\alpha)}{R}. \quad (\text{III.40})$$

Reemplazando las Ecs. (III.38), (III.39) y (III.40) en la Ec. (III.37) y teniendo en cuenta las expresiones para R , M y Z_p dadas por las Ecs. (III.15), podemos escribir

$$\mathcal{F}^p \left\{ \bar{R}(\xi, d_m) \right\} := \bar{R}(\xi, d''_m), \quad (\text{III.41})$$

con

$$d''_m = d_m \cos(p\pi/2), \quad (\text{III.42})$$

y donde

$$Z_p = \frac{2\alpha d_m^2}{\lambda}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (\text{III.43})$$

es la distancia de Talbot de la función $\bar{R}(\xi, d_m)$ cuando es iluminada con ondas planas.

Por lo tanto, para un objeto $t(\xi)$ compuesto por una superposición lineal de redes de Ronchi (funciones de Rademacher), la distribución de amplitud correspondiente a $\mathcal{F}^p \{ \bar{R}(\xi, d_m) \}$ es idéntica a la amplitud asociada con la α -ésima autoimagen de la red $\bar{R}(\xi, d'_m)$, iluminada por una onda esférica convergente de radio $R = f_1 / \tan(p\pi/2)$. La localización del plano de esta transformada de Fourier fraccionaria, es $Z_p = f_1 \tan(p\pi/2)$, la cual coincide con la distancia de Talbot $z_\alpha = 2\alpha d_m^2 / \lambda$ de la red $\bar{R}(\xi, d_m)$ iluminada con una onda plana. La Ec. (III.41) relaciona la frecuencia espacial $1/d''_m$, que puede ser suprimida por la acción del filtro en la región de Fresnel, con el orden p de la FRFT de la componente correspondiente en $t(\xi)$.

A efecto de ilustrar las relaciones propuestas fueron obtenidas, en forma numérica, las transformadas de Fourier fraccionarias de la función $\bar{R}(\xi, d_3)$, que tiene un período $d_3 = 0.5x_0$, para órdenes fraccionarios p que satisfacen la Ec. (III.43) para valores de $\alpha = 1, 2, 3$, y 4 . De esta manera, las FRFT calculadas coinciden con las cuatro primeras autoimágenes de versiones de $\bar{R}(\xi, d_3)$ con la escala modificada y que tienen un período mayor que el de $\bar{R}(\xi, d_3)$ dado por: $d'_3 = 0.5x_0 / \cos(p\pi/2)$. En la Figura III.6 se muestra la amplitud normalizada de $\bar{R}(\xi, d_3)$ y de cuatro de sus FRFT calculadas para los ordenes fraccionarios $p = 0.394$, $p = 0.610$, $p = 0.721$ y $p = 0.785$. Las funciones obtenidas resultan ser también funciones periódicas con períodos dados por la Ec. (III.42) de $d''_3 = 0.407x_0$, $d''_3 = 0.287x_0$, $d''_3 = 0.212x_0$, y $d''_3 = 0.166x_0$ respectivamente. En el capítulo siguiente podrá apreciarse nuevamente la relación existente entre la FRFT y el fenómeno de autoimágenes en un contexto diferente.

*Analizando
que están las otras
y la operación al producto.*

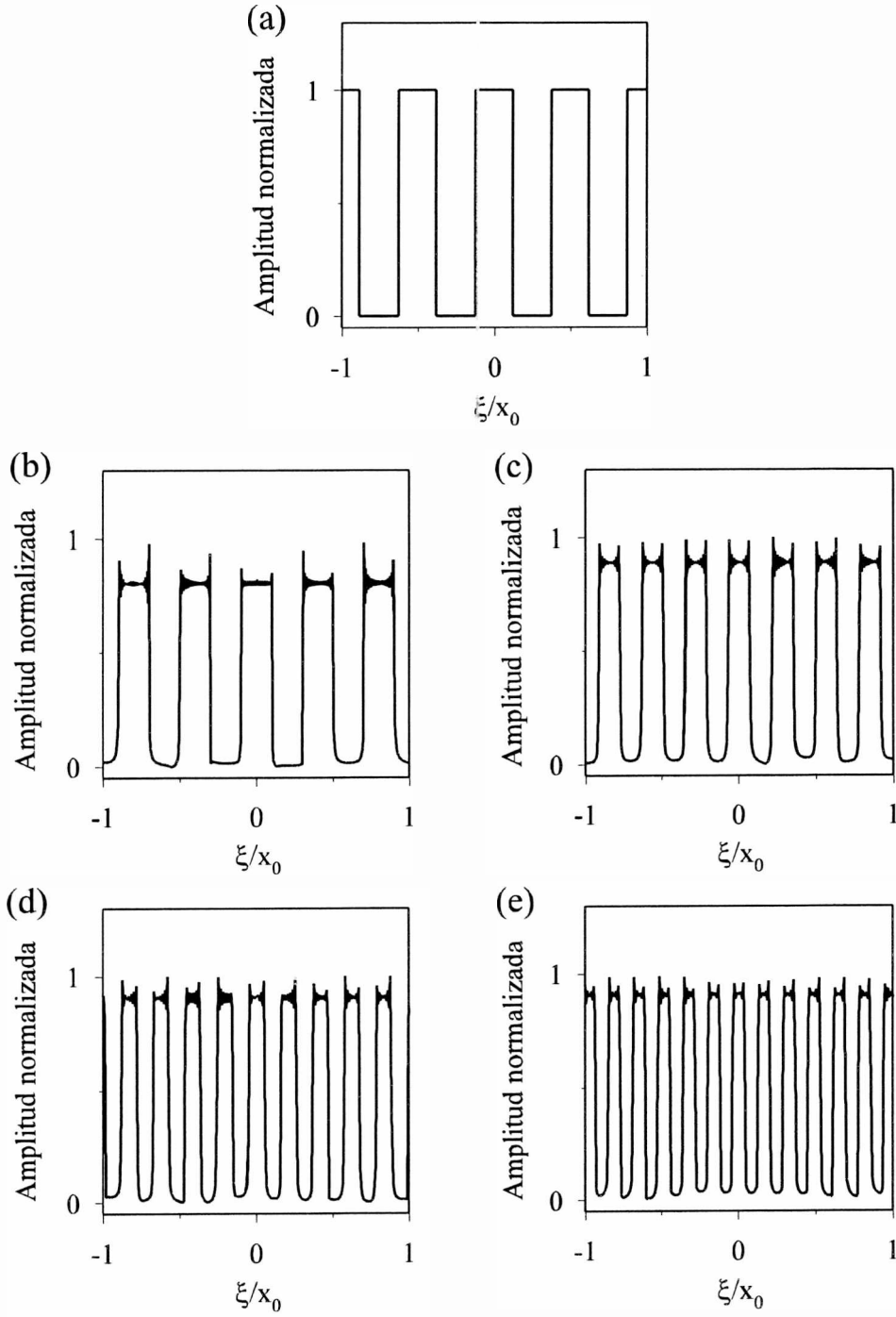


Figura III.6: (a) Amplitud normalizada de la función $\bar{R}(\xi, d_3)$. (b), (c), (d) y (e) Amplitud normalizada de la FRFT de la función ilustrada en (a) para órdenes fraccionarios $p = 0.394$, $p = 0.610$, $p = 0.721$ y $p = 0.785$, que resultan ser también funciones periódicas con períodos $d_3'' = 0.407x_0$, $d_3'' = 0.287x_0$, $d_3'' = 0.212x_0$, respectivamente.

III.5 Cálculo numérico de la FRFT

La transformada de Fourier fraccionaria puede ser calculada en forma analítica sólo para un numero reducido de funciones. Como ejemplo de ellas pueden mencionarse la función de Gauss, la distribución δ de Dirac y la función de Gabor. El resultado de la expresión analítica de la FRFT para alguna de estas funciones puede verse el Apéndice A. Sin embargo, en la mayoría de los cálculos desarrollados a lo largo de esta tesis, ha sido necesario trabajar con funciones más complejas. Por lo tanto, fue necesario implementar algoritmos, con el objeto de desarrollar programas de cálculo, a fin de realizar las simulaciones numéricas. De la doble definición óptica de la FRFT pueden extraerse también dos posibles métodos de cálculo de la versión discreta de ésta. El primero de ellos está basado en la expansión de la señal en la base de funciones de Hermite-Gauss, el segundo es una aplicación del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) a la resolución de una integral con núcleo de Fresnel. Esta sección tiene por objeto exponer el trabajo realizado en el cálculo digital de la FRFT.

III.5.1 Implementación basada en las funciones de Hermite-Gauss

La siguiente implementación discreta se desprende de la definición de la FRFT en base a la propagación luminosa en un medio GRIN. Una función $u_0(x_0)$ es de banda limitada si existe un valor mínimo x_m tal que la transformada de Fourier de $u_0(x_0)$ verifique, en su dominio de definición, la condición

$$\mathcal{F}u_0(x_0) = u_1(x) = 0, \quad \text{para } |x| \geq x_m > 0. \quad (\text{III.44})$$

De acuerdo con el teorema de Nyquist del muestreo [3, 38], toda función $u_0(x_0)$ de banda limitada puede representarse mediante un vector columna de N muestras discretas tomadas a intervalos que deben cumplir la restricción

$$\delta x_0 \leq \frac{1}{2x_m}. \quad (\text{III.45})$$

De esta forma, la versión discreta de $u_0(x_0)$ está dada por el vector

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T. \quad (\text{III.46})$$

Si $\mathbf{u}(z_0)$ es la distribución del campo luminoso dentro del medio GRIN correspondiente a la función de entrada, la expresión para el campo después de una propagación $\Delta z = z_1 - z_0$ estará dada por $\mathbf{u}(z_1)$. El proceso de propagación del campo puede expresarse como el siguiente producto matricial

$$\mathbf{u}(z_1) = \mathbb{B}(\Delta z) \mathbf{u}(z_0) \quad (\text{III.47})$$

donde \mathbb{B} es un operador matricial de $N \times N$ elementos. Este operador es equivalente a una transformada de Fourier fraccionaria discreta de orden $p = \Delta z/L$, donde L es distancia de enfoque del medio GRIN dada por la Ec. (II.2). Para encontrar la forma explícita que tiene el operador \mathbb{B} , se define Ψ_m como la versión discreta de la función de Hermite-Gauss de orden $m - 1$, dada por la Ec. (II.4), como

$$\Psi_m = [\tilde{\Psi}_{1m}, \tilde{\Psi}_{2m}, \dots, \tilde{\Psi}_{Nm}]^T, \quad (\text{III.48})$$

con

$$\tilde{\Psi}_{im} = \frac{\Psi_{i, m-1}}{\sqrt{h_{m-1}}}, \quad (\text{III.49})$$

donde $h_m = 2^m m! \sqrt{\pi} \omega^2 / \sqrt{2}$. El procedimiento de normalización expresado por la Ec. (III.49) asegura la ortonormalidad de los vectores Ψ_m .

Cualquier función de entrada, puede ser expandida en las funciones de Hermite-Gauss como lo expresa la Ec. (II.9). En su versión discreta, dicha función puede ser expandida en los primeros N vectores Ψ_m de la forma

$$u_i(z) = \sum_{m=1}^N \tilde{A}_m(z) \tilde{\Psi}_{im}, \quad (\text{III.50})$$

donde $\tilde{A}_m = A_{m-1} \sqrt{h_{m-1}}$. Definiendo el vector $\mathbf{A} = [\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_N]^T$, la ecuación anterior puede expresarse en forma matricial

$$\mathbf{u}(z) = \Psi \mathbf{A}(z), \quad (\text{III.51})$$

donde Ψ es una matriz de $N \times N$ de elementos $\tilde{\Psi}_{im}$. Para el caso particular en que la función de entrada es una función de Hermite-Gauss, por ser ésta una autofunción del operador propagación en el medio GRIN, la Ec. (III.47) toma la forma

$$\mathbb{B}(\Delta z) \Psi_m = e^{i\beta_m \Delta z} \Psi_m. \quad (\text{III.52})$$

El término $e^{i\beta_m \Delta z}$ es el autovalor correspondiente al m -ésimo autovector y la constante β_m está dada por la Ec. (III.50). A partir de la Ec. (III.51), el vector de entrada se puede escribir como

$$\mathbf{u}(z_0) = \Psi \mathbf{A}(z_0) \quad (\text{III.53})$$

y su inversa es

$$\mathbf{A}(z_0) = \Psi^{-1} \mathbf{u}(z_0). \quad (\text{III.54})$$

De la Ecs. (III.47), (III.50) y (III.52), la aplicación del propagador $\mathbb{B}(\Delta z)$ sobre el vector $\mathbf{u}(z_0)$ permite hallar las componentes $\mathbf{u}(z_1)$, las que se escriben como:

$$u_i(z) = \sum_{m=1}^N \tilde{A}_m(z_0) e^{i\beta_m \Delta z} \tilde{\Psi}_{im}, \quad (\text{III.55})$$

por lo que la relación matricial entre los coeficientes \tilde{A}_m de ambos vectores, inicial y final, es:

$$\mathbf{A}(z_1) = \beta(\Delta z) \mathbf{A}(z_0), \quad (\text{III.56})$$

donde $\beta(\Delta z)$ es una matriz diagonal de $N \times N$ elementos de la forma $e^{i\beta_m \Delta z}$. De la Ecs. (III.51), (III.56) y (III.52), se puede escribir

$$\mathbf{u}(z_1) = \Psi \beta(\Delta z) \Psi^{-1} \mathbf{u}(z_0), \quad (\text{III.57})$$

donde por la Ec. (III.47) podemos identificar el operador propagación y escribirlo como:

$$\mathbb{B}(\Delta z) = \Psi \beta(pL) \Psi^{-1}. \quad (\text{III.58})$$

Este resultado final permite generar un algoritmo para calcular la FRFT de orden p . Al vector inicial hay que multiplicarlo por dos matrices lo que, al margen de la cantidad de operaciones necesarias para calcular las funciones de Hermite-Gauss, requiere del orden de $2N^2$ multiplicaciones. Para un vector unidimensional de 512 elementos, que ha sido la opción más utilizada en esta tesis, el número aproximado de multiplicaciones es 524000 y es independiente del orden fraccionario p .

III.5.2 Cálculo directo de la integral con núcleo de Fresnel

La integración directa del operador dado por

$$u_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan \phi} (x_0^2 + x^2) \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \sin \phi} x_0 x \right] dx_0, \quad (\text{III.59})$$

es otra de las opciones para calcular la FRFT. El problema del cálculo numérico de integrales con un término de fase cuadrático, que aparecen frecuentemente en problemas de difracción, es que se necesita un número grande de muestras de la función debido a que el núcleo de la integral oscila rápidamente. Este problema es más importante a medida que el orden fraccionario p se acerca a los valores 0 y ± 2 , hecho que puede asociarse al cálculo de un patrón de difracción de Fresnel a una distancia cercana a la pupila difractante. Por lo tanto, el valor de p debe estar acotado en un intervalo que evite tales valores, como por ejemplo $p \in [0.5, 1.5]$ o $p \in [2.5, 3.5]$. Para realizar el cálculo de la integral con valores de p en los intervalos restantes $[-0.5, 0.5]$ o $[1.5, 2.5]$, puede utilizarse la siguiente propiedad

$$\mathcal{F}^p u_0(x_0) = \mathcal{F}^1 \mathcal{F}^q u_0(x_0), \quad \text{con } q = p - 1. \quad (\text{III.60})$$

En tal caso, la FRFT de orden q puede calcularse directamente debido a que $q \in [-1.5, -0.5]$ o $q \in [0.5, 1.5]$. Debe observarse que, debido a las Ecs. (II.57), el intervalo $[-1.5, -0.5]$ es equivalente al intervalo $[2.5, 3.5]$.

Con el objeto de evaluar en forma directa la integral de la Ec. (III.59) puede interpretarse a la FRFT de la función $u_0(x_0)$ como la transformada de Fourier ordinaria de una función modificada $\tilde{u}_0(x_0)$. Realizando en la Ec. (III.59) el cambio de variables dado por

$$\xi = \frac{x}{\lambda f_1 \sin \phi}, \quad (\text{III.61})$$

se obtiene

$$u_p(\xi \lambda f_1 \sin \phi) = \exp \left[\frac{i\pi \lambda f_1}{2} \xi^2 \sin(2\phi) \right] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0) \exp \left(\frac{i\pi x_0^2}{\lambda f_1 \tan \phi} \right) dx_0}_{\tilde{u}_0(x_0)} \times \quad (\text{III.62})$$

La ecuación anterior puede escribirse de la forma

$$u_p(x) \propto \tilde{u}_1(\xi) \equiv \mathcal{F}\tilde{u}_0(x_0),$$

$$\searrow = e^{i\Phi(\xi)} \tilde{u}_1(\xi), \nearrow \quad (\text{III.63})$$

con

$$\Phi(\xi) = \exp \left[\frac{i\pi\lambda f_1}{2} \xi^2 \sin(2\phi) \right], \quad (\text{III.64})$$

$$\tilde{u}_0(x_0) = u_0(x_0) \exp \left(\frac{i\pi x_0^2}{\lambda f_1 \tan \phi} \right), \quad (\text{III.65})$$

donde el cambio de escala depende del orden fraccionario p y está dado por la Ec. (III.61). Si la función $\tilde{u}_0(x_0)$ es de banda limitada entonces se verifica que $\tilde{u}_1(\xi) = 0$ para $|\xi| \geq \xi_m > 0$ y de acuerdo con el teorema de Nyquist, la condición de muestreo para la señal en el espacio x_0 dependerá del orden fraccionario p de la forma

$$\delta x_0 \leq \frac{1}{2\xi_m} = \frac{\lambda f_1 |\sin \phi|}{2x_m}. \quad (\text{III.66})$$

Si bien en este método puede utilizarse el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) [39], que reduce el número de multiplicaciones necesarias para hallar la transformada de Fourier en la Ec.(III.63) de $O(N^2)$ a $O(N \log N)$ donde N es el número de elementos de la muestra de la señal, presenta la desventaja que debe hacerse uso de algún algoritmo externo de interpolación a fin de corregir el error de escala dado por la Ec. (III.61).

Capítulo IV

La representación (x,p) y sus aplicaciones.

IV.1 Introducción

Las representaciones espacio-fase son frecuentemente la forma más sencilla y práctica de describir ciertos fenómenos relacionados con el procesamiento de señales. Muchos de estos formalismos han demostrado ser herramientas útiles para estudiar diversos problemas en la óptica, como por ejemplo: compresión de imágenes, procesamiento de señales y análisis de sistemas ópticos.

En la óptica geométrica la representación espacio-fase $y\omega$ considera a la luz como un haz de rayos. A cada rayo se le asignan dos parámetros: su localización y su dirección. De esta manera, los dos parámetros son representados mediante una coordenada en el plano $y\omega$ como lo ilustra la Figura IV.1. Este formalismo, que no incluye los efectos difractivos, puede representar la propagación de cada rayo a lo largo de un sistema óptico mediante una simple curva en el plano $y\omega$.

Otra clase de representación espacio-fase es la WDF, abordada con detalle en el Capítulo II. Esta función representa en forma simultánea las propiedades espaciales y espectrales (frecuencias espaciales en el caso especial de la óptica) de una señal, teniendo en cuenta los fenómenos difractivos. Sin embargo, existen ocasiones, en las que no es conveniente utilizar la WDF debido a que no está linealmente relacionada con la señal. Otra desventaja del formalismo de la WDF es que existe una

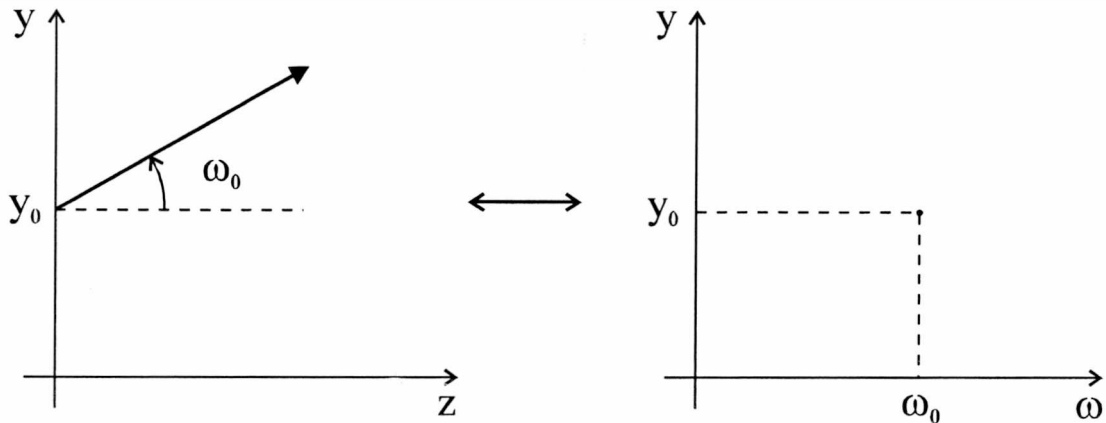


Figura IV.1: Esquema que ilustra la representación $y\omega$ de un rayo de luz en la óptica geométrica.

indeterminación, dada por un factor de fase, en la transformación inversa.

Más allá de la duplicación del dominio y de las desventajas que esto supone, los formalismos $y\omega$ y WDF tienen interesantes propiedades que son adecuadas para el análisis y el diseño de sistemas ópticos. Como ejemplo de ellas puede mencionarse que los operadores ópticos elementales, como la propagación en el espacio libre y la magnificación por medio de lentes delgadas, se expresan como simples cambios de coordenadas en estas representaciones.

En la segunda sección de este capítulo se discutirán dos nuevas representaciones basadas en la FRFT: la (x,p) y la (r,p) , propuestas por Mendlovic et al. [40], y se analizará su relación con la transformación de Radon-Wigner. En la tercera sección se presentará una implementación óptica sencilla de la representación de Radon-Wigner de una señal basada en el formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria [41]. Finalmente, en la cuarta sección se desarrollarán aplicaciones de estos nuevos formalismos al análisis de parámetros de calidad de sistemas ópticos formadores de imagen [42, 43].

IV.2 Representaciones espacio-fase basadas en la FRFT

IV.2.1 La representación (x,p)

La representación (x,p) es una presentación conjunta de las transformadas de Fourier fraccionarias de una señal para diferentes órdenes p . Para señales unidimensionales este esquema consta de dos ejes cartesianos ortogonales como se ilustra en la Figura IV.2(a). El eje vertical es el de la distribución de campo escalar $u_p(x)$ correspondiente a la FRFT de orden p de la función original $u_0(x)$. El eje horizontal corresponde a los diferentes órdenes p . En forma más compacta la representación (x,p) puede escribirse como:

$$F(x, p) = u_p(x). \quad (\text{IV.1})$$

En este tipo de esquema la magnitud a representar en función del orden p puede ser la amplitud del campo, su intensidad o bien su parte real o imaginaria.

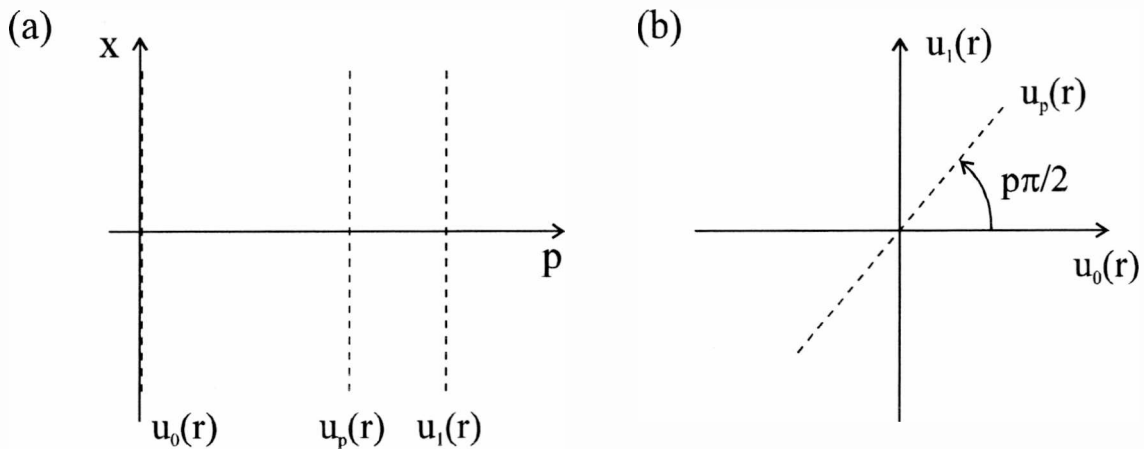


Figura IV.2: Esquema de la representación: (a) (x,p) ; (b) (r,p) .

En la Figura IV.3 se muestran las simulaciones numéricas de las representaciones (x,p) de una función gaussiana, una doble rendija y una red de Ronchi. Estas simulaciones fueron realizadas mediante un programa desarrollado en C que calcula

las FRFT utilizando el método de expansión en polinomios de Hermite-Gauss descrito en el Capítulo II. En la Figura IV.3(a), la función original es una gaussiana de ecuación $\exp[-(x-a)/2\sigma^2]$, donde $a = 256.5$ pixels y $\sigma = 114$ pixels. En el caso de la Figura IV.3(b), cada rendija tiene un ancho de 8 pixels y la distancia de separación entre ambas rendijas es de 35 pixels. Finalmente la red de Ronchi utilizada para generar la Figura IV.3(c) tiene un período de 32 pixels y la relación zona clara/oscura es igual a la unidad. En los tres casos las funciones unidimensionales utilizadas fueron muestreadas en un dominio de 512 pixels y la magnitud representada en estas gráficas para valores de p entre 0 y 1 es la amplitud del campo escalar complejo.

Una observación importante es que la función $F(x, p)$ ilustra la distribución de luz en una propagación dentro de un medio GRIN parabólico. En la Figura IV.3(c) puede observarse el efecto Talbot o de autoimágenes que se produce a medida que el campo se propaga en el medio GRIN (aumento del orden p). En dicha figura puede notarse que el frente de onda reproduce estructuras periódicas con período menor a medida que el campo se propaga produciéndose una inversión de contraste (autoimágenes positivas y negativas) en forma alternada.

IV.2.2 La representación (r,p)

Otra forma de representar en forma conjunta las diferentes FRFT de una misma señal unidimensional es la que se ilustra en la Figura IV.2(b). En esta representación, llamada (r,p) , las transformadas de Fourier fraccionarias son graficadas en forma polar donde el ángulo de cada una está relacionado con su orden fraccionario mediante la ecuación $\phi = p\pi/2$. El contenido de información en esta nueva representación es el mismo que en la anterior, lo único que varía es la manera de visualizar los datos. Implícitamente esta representación puede escribirse como

$$F(r, p) = u_p(r). \quad (\text{IV.2})$$

Es importante mencionar que, como puede observarse en la Ec. (IV.2), r puede tomar valores negativos.

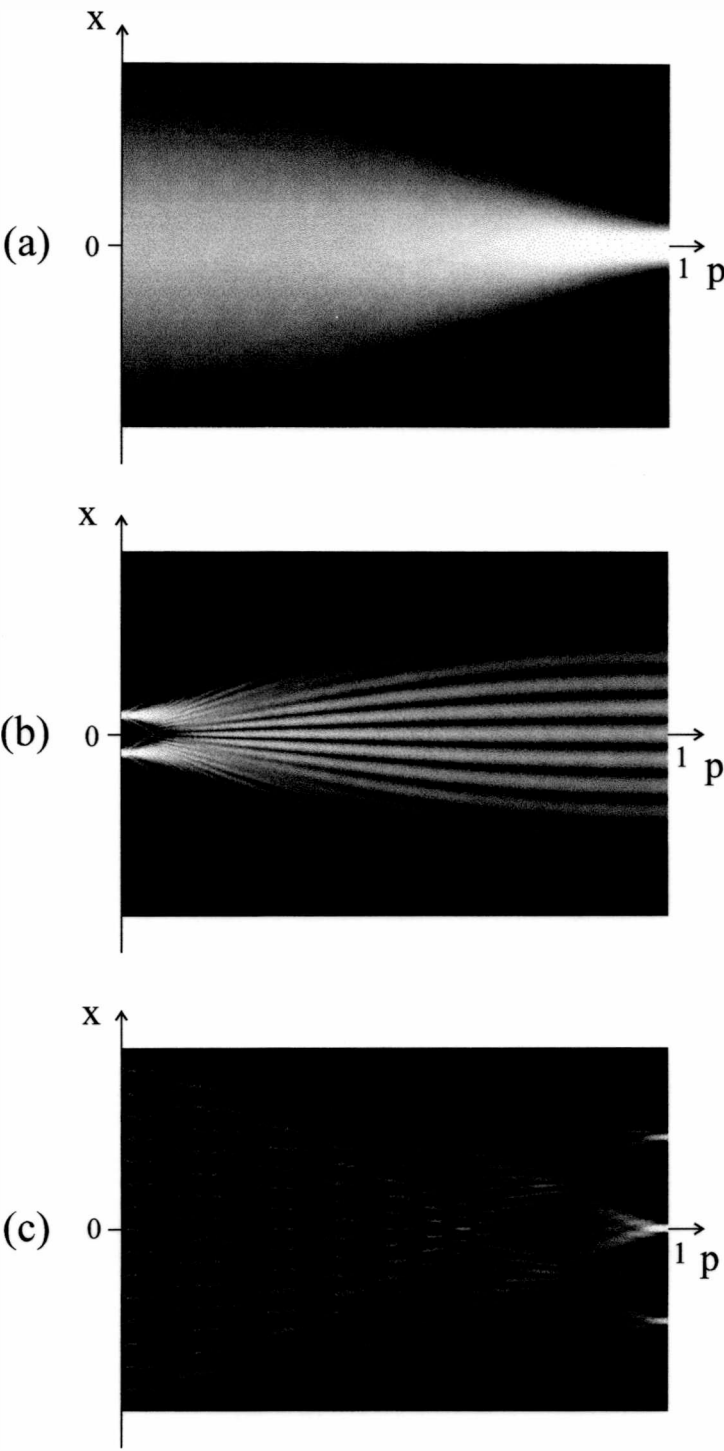


Figura IV.3: Representaciones (x,p) que muestran el módulo del campo escalar complejo para valores de p entre 0 y 1 de las siguientes señales unidimensionales: (a) función gaussiana, (b) doble rendija y (c) red de Ronchi.

Sin embargo, esto no genera una contradicción con la definición de coordenada polar puesto que los operadores que definen a la FRFT verifican:

$$u_p(-r) = v_{p+2}(r). \quad (\text{IV.3})$$

De acuerdo a la definición de esta representación el valor $r = 0$ no contiene información relevante y debe ser desechado. Como en todo diagrama polar la resolución espacial en las regiones para r pequeños debe ser muy alta para lograr codificar la información. Esto provoca que en la práctica exista un límite inferior r_{\min} por debajo del cual la información no se pueda almacenar, lo que significa una desventaja de este tipo de representación.

IV.2.3 Relación entre la FRFT y la transformación de Radón-Wigner

A la aplicación conjunta de las transformaciones de Radon (R) y de Wigner a una señal se la conoce como transformación de Radon-Wigner (RWT). Esta es ampliamente utilizada en el procesamiento de señales, especialmente en el de señales tomográficas [44, 45, 46]. La relación que existe entre la RWT y la FRFT fue demostrada por Lohmann y Soffer en 1994 [47].

La transformación de Radon puede ser resumida en dos pasos: una rotación seguida de una proyección, esto es

$$v_0(x, y) \rightarrow v_0(x \cos \phi - y \sin \phi, y \cos \phi + x \sin \phi) = v(x', y'), \quad (\text{IV.4})$$

$$v(x', y') \rightarrow \int v(x', y') dy' = V(x'; \phi). \quad (\text{IV.5})$$

La aplicación de la transformación de Radon a la WDF de una señal conforma la transformación RWT que puede expresarse como:

$$u_0(x) \rightarrow W_0(x, \nu), \quad (\text{IV.6a})$$

$$W_0(x, \nu) \rightarrow R[W_0; \phi] = V(x'; \phi), \quad (\text{IV.6b})$$

o bien en forma implícita

$$u_0(x) \rightarrow \text{RWT}[u_0(x)] = V(x'; \phi). \quad (\text{IV.7})$$

Por lo tanto la RWT consiste en la rotación y proyección de la WDF de la señal. Un procedimiento alternativo para obtener $V(x'; \phi)$ a partir de la señal $u_0(x)$ es: primero hallar la FRFT de orden p asociado al ángulo $\phi = p\pi/2$, y luego realizar el módulo cuadrado de la señal obtenida en el primer paso,

$$u_0(x) \rightarrow u_p(x') = \text{FRFT}[u_0]; \quad p = 2\phi/\pi, \quad (\text{IV.8a})$$

$$u_p(x') \rightarrow |u_p(x')|^2 = V(x'; \phi). \quad (\text{IV.8b})$$

La equivalencia entre las Ecs. (IV.7) y (IV.8b) permite obtener la relación entre la RWT y la FRFT, la que puede expresarse de la siguiente manera:

$$\text{RWT}[u_0] = |u_p|^2; \quad p = 2\phi/\pi. \quad (\text{IV.9})$$

La demostración de la Ec. (IV.9) está basada en los siguientes conceptos: el primero es que según la definición indirecta de la FRFT dada en el Capítulo II, esta operación está asociada a la rotación de la WDF de la señal en un ángulo $\phi = p\pi/2$, el segundo es que el módulo cuadrado de una señal puede obtenerse, como lo indica la Ec. (II.15a), realizando una proyección de su WDF. Los conceptos de rotación de la WDF de la señal y su posterior proyección, que están involucrados en la RWT, son reemplazados por el módulo cuadrado de la FRFT con el mismo resultado. Una prueba formal de la Ec. (IV.9) puede ser encontrada en la Ref. [47].

De la estrecha relación existente entre la FRFT y la RWT puede demostrarse, utilizando la Ec. (IV.9), que la representación (x,p) de la señal, cuando la magnitud esquematizada es la intensidad, es equivalente a tener una representación continua y simultánea de las RWT de la señal para todos los posibles ángulos de proyección ϕ en un intervalo determinado. A esta disposición de las RWT se la conoce con el nombre de representación de Radon-Wigner de la señal [48].

IV.3 Implementación óptica de la representación de Radon-Wigner

Como fue analizado en el Capítulo III es posible generar la FRFT de una señal bidimensional mediante la propagación de un frente de onda esférico como lo

muestran las Figuras III.2(b) y III.2(c). Si sólo es relevante la intensidad de la FRFT la simple difracción en el espacio libre de un frente de onda esférico de radio de curvatura R formará todas las FRFT de la transparencia objeto con distintas magnificaciones. Estas FRFT para órdenes fraccionarios en el intervalo $[0,1]$ estarán localizadas en forma continua en diferentes planos distribuidos axialmente entre el plano de entrada y el punto de convergencia del frente de onda S (ver Figura III.2(c)). Las siguientes ecuaciones permiten calcular la distancia entre la transparencia objeto y el plano que contiene a la FRFT de orden p , y la magnificación de la FRFT respectivamente

$$Z_p = \frac{f_1 \tan \phi}{1 + \frac{f_1}{R} \tan \phi}, \quad (\text{IV.10})$$

$$M_p = \frac{1 + \tan \phi \tan (\phi/2)}{1 + \frac{f_1}{R} \tan \phi}, \quad (\text{IV.11})$$

donde $\phi = p\pi/2$ y f_1 es un factor de escala. El hecho de poder obtener en forma continua las FRFT de una señal habilita la posibilidad de diseñar un procesador óptico para obtener la representación de Radon-Wigner de la señal unidimensional, que no es más que la presentación del módulo cuadrado de varias FRFT en forma simultánea.

Consideremos el arreglo óptico ilustrado en la Figura IV.4 donde la señal colocada en el plano de entrada es $t(x_0)$. La naturaleza unidimensional de $t(x_0)$ nos permite trabajar con un frente de onda cilíndrico de curvatura R en lugar del esférico necesario para señales bidimensionales. Asimismo, debido a que las FRFT no presentan variaciones a lo largo del eje vertical (dirección y), podemos seleccionar solo una banda horizontal de ancho infinitesimal, asociada a algún valor de la coordenada y , para utilizarla como canal fraccionario. De esta manera, si a cada orden fraccionario se le asigna una banda con valor de coordenada y diferente, puede accederse a una sola FRFT en forma independiente de las demás. El elemento óptico L en la Figura IV.4 debe ser diseñado de tal manera que pueda formar imagen de los diferentes canales fraccionarios distribuidos axialmente, con la magnificación adecuada y simultáneamente en el mismo plano. Esto determina que la distancia focal de la lente L debe ser diferente para cada orden fraccionario p .

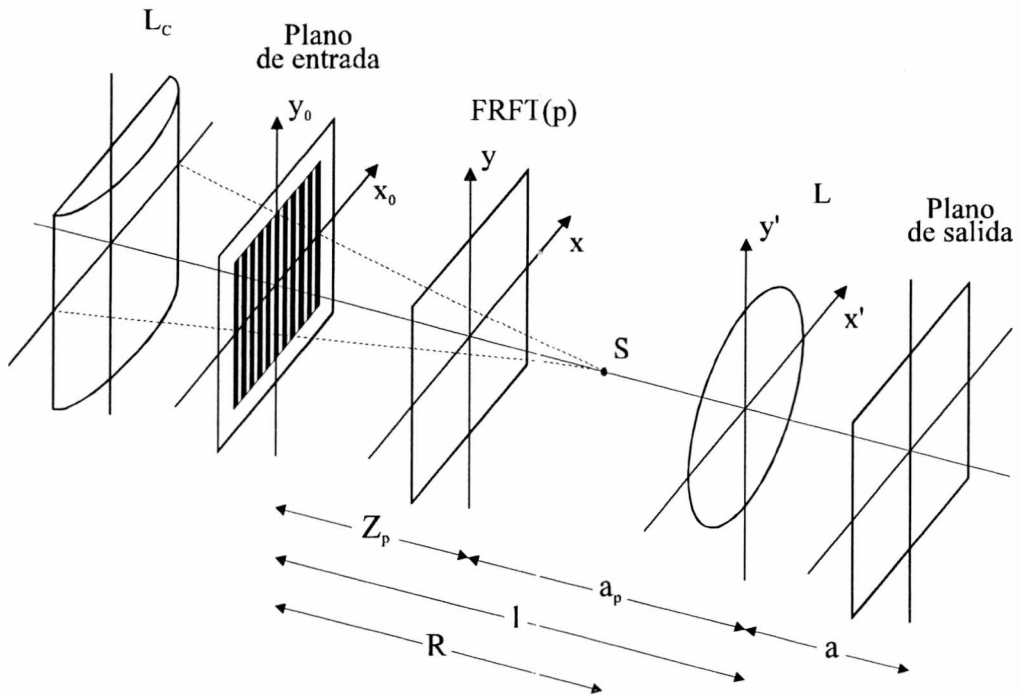


Figura IV.4: Arreglo óptico para obtener la representación de Radon-Wigner de una función unidimensional. La lente L_C provee el frente de onda cilíndrico que converge a una línea que corta al eje óptico en S . La propagación en el espacio libre genera las FRFT localizadas a las distancias R de la transparencia de entrada. Todas las FRFT forman imagen simultáneamente en el plano de salida por efecto de la lente varifocal L .

El arreglo óptico de la Figura IV.4 aprovecha la naturaleza unidimensional de la señal para asignar diferentes canales a los órdenes fraccionarios con el objeto de separar la información. Para que ésto sea posible, la distancia focal de la lente L debe variar con la coordenada y' de la misma forma en que ésta lo hace con el orden fraccionario p . Para cada valor de p (coordenada y') la lente L debe formar imagen de cada plano objeto localizado a una distancia a_p antes de ella en un plano imagen fijo de salida a una distancia a detrás de ella. Para obtener este resultado la variación de la distancia focal con p debe verificar

$$f(p) = \frac{a_p a}{a_p + a}, \quad (\text{IV.12})$$

donde se hizo uso de la ecuación Gaussiana de las lentes. Teniendo en cuenta que,

como puede observarse en la Figura IV.4,

$$a_p = l - Z_p \quad (\text{IV.13})$$

y utilizando la Ec. (IV.10), la Ec. (IV.12) puede ser escrita como

$$f(p) = \frac{al - f_1 a \tan(p\pi/2) \left(1 - \frac{l}{R}\right)}{a + l - f_1 \tan(p\pi/2) \left(1 - \frac{l}{R} - \frac{a}{R}\right)}. \quad (\text{IV.14})$$

Debido a que la distancia focal f es función del orden fraccionario p , la lente L producirá una magnificación también variable con p . La magnificación dada por el sistema óptico para cada orden fraccionario p es

$$M_L(p) = -\frac{a}{a_p} \quad (\text{IV.15a})$$

$$= \frac{a}{Z_p - l}. \quad (\text{IV.15b})$$

Utilizando la Ec. (IV.10), se obtiene

$$M_L(p) = -\frac{a \left[1 + \frac{f_1}{R} \tan(p\pi/2)\right]}{l \left[1 + \tan(p\pi/2) \left(\frac{f_1}{R} - \frac{f_1}{l}\right)\right]}. \quad (\text{IV.16})$$

Sin embargo, la magnificación provista por el sistema óptico L debe corregir el error intrínseco en la magnificación producido por el método de obtención de la FRFT mediante la difracción de la onda cilíndrica. Para lograr que en el plano de salida las FRFT tengan la escala correcta para todo p , la magnificación del sistema óptico debe ser

$$M'_L = -\frac{1}{M_p}, \quad (\text{IV.17})$$

donde M_p es la magnificación con el error intrínseco. Utilizando la Ec. (IV.11) la ecuación anterior se puede escribir

$$M'_L = -\frac{1 + \frac{f_1}{R} \tan(p\pi/2)}{1 + \tan(p\pi/2) \tan(p\pi/4)}. \quad (\text{IV.18})$$

Comparando las Ecs. (IV.16) y (IV.18) se puede notar que la dependencia funcional de ambas con el orden fraccionario p es diferente, consecuentemente, no es

posible encontrar una solución, para los parámetros geométricos del arreglo óptico, que resulte válida para todos los valores de p en forma simultánea.

Para obtener una solución aproximada al problema puede seleccionarse un conjunto de parámetros, en este caso R , l , y a , de modo de encontrar aquellos que hagan mínima la diferencia entre las funciones M_L y M'_L para valores de p en el intervalo $[0,1]$. Una forma de hallar los valores de tales parámetros es utilizar el método de cuadrados mínimos. Para esto se define la función de mérito

$$J(l, a, z) = \int_0^1 \left(\frac{M'_L - M_L}{M'_L} \right)^2 dp \quad (\text{IV.19a})$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{lf_1^2}{a^2 R} \right) + \frac{\pi}{4} \frac{1}{a^2} \left(l^2 + f_1^2 + \frac{l^2 f_1^2}{R^2} \right) + \frac{1}{a} \left(2f_1 - 2l - \frac{lf_1}{a} - \frac{2lf_1}{R} + \frac{l^2 f_1}{aR} \right), \quad (\text{IV.19b})$$

que al ser minimizada da como resultado las siguientes condiciones de vínculo

$$a = l \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{IV.20a})$$

$$R = \frac{lf_1}{l + f_1}. \quad (\text{IV.20b})$$

En la Figura IV.5 se ilustran las gráficas de M_L y M'_L para un conjunto particular de parámetros que verifican las Ecs. (IV.20). Puede observarse que la diferencia relativa media es aproximadamente del 10%. Frecuentemente, la zona de mayor interés en la representación de Radon-Wigner es la región intermedia entre los extremos dados por la misma señal ($p = 0$) y por su transformada de Fourier ($p = 1$). En este caso los límites de integración en la Ec. (IV.19a) pueden elegirse para tener en cuenta sólo esta región. A medida que se reduce el intervalo en el que se minimiza la función de mérito J se mejora la aproximación realizada.

En la Figura IV.6 se muestra la variación de la distancia focal y la potencia óptica de la lente L con p expresada por la Ec. (IV.14) bajo las condiciones restrictivas de las Ecs. (IV.20) para los siguientes valores de los parámetros geométricos del procesador: $z = 426$ mm, $l = 646$ mm y $a = 831$ mm. Como se observa en la gráfica, para esta combinación de parámetros, la potencia óptica es aproximadamente lineal excepto para valores cercanos a $p = 1$. Esta linealidad es una característica de las

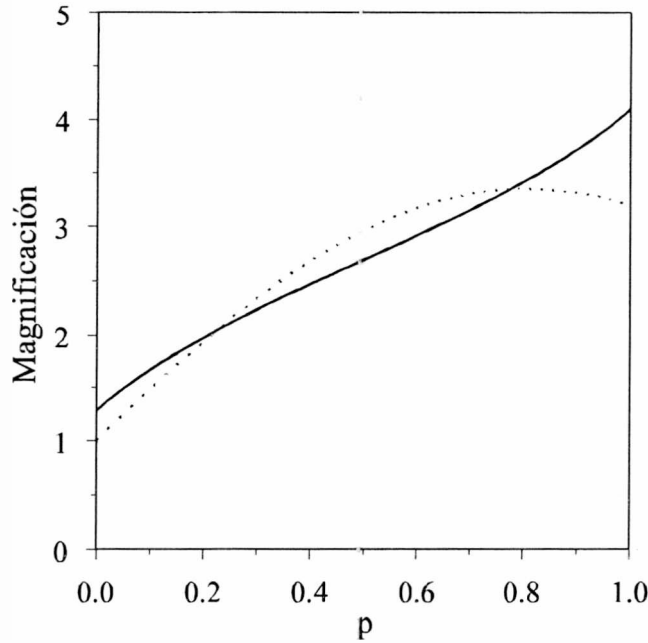


Figura IV.5: Magnificación producida por la lente L para valores $z = 426$ mm, $l = 646$ mm, y $a = 831$ mm. M_L (solución aproximada) en curva llena y M'_L (solución exacta) en curva punteada.

lentes de adición progresiva oftálmicas, en las cuales existe una transición continua lineal entre dos potencias ópticas que corresponden a las llamadas zonas cercana y lejana. En sistema óptico de la Figura IV.4 la lente L es una lente esférica progresiva de $+2.75$ D de potencia óptica y $+3$ D de adición.

La Figura IV.7 muestra la comparación entre simulaciones numéricas y resultados experimentales obtenidos para una red de Ronchi como transparencia objeto. Las Figuras IV.7(a) y IV.7(b) ilustran simulaciones numéricas de la representación de Radon-Wigner calculadas exactamente y con la aproximación dada por las Ecs. (IV.20), respectivamente. El resultado experimental se muestra en la Figura IV.7(c). En estas figuras pueden observarse las pequeñas diferencias en la magnificación para los valores extremos de p .

Como una demostración de la utilidad del procesador propuesto en técnicas que utilicen la RWT se ha estudiado su aplicación a la detección de un señal que tiene una modulación lineal en su frecuencia espacial conocida como "chirp". Este

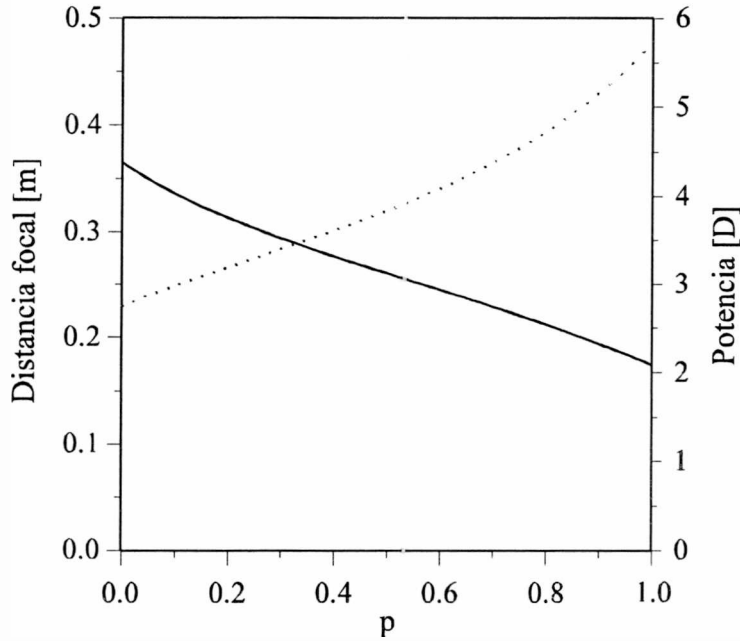


Figura IV.6: Distancia focal (curva llena) y potencia óptica (curva punteada) de la lente varifocal ideal L para los valores $z = 426$ mm, $l = 646$ mm y $a = 831$ mm.

tipo de señal genera un pico de energía en la representación de Radon-Wigner que le es característico. La coordenada p de ese máximo en el dominio espacio-fase está directamente relacionada al rango de variación de la frecuencia de la señal. Debido a que el error de escala introducido por el procesador afecta solo a la coordenada x de la representación de Radon-Wigner, el rango de variación de la frecuencia puede ser obtenido sin errores. Para probar esta posibilidad de detección, se ha elegido como transparencia de entrada una red binaria con una frecuencia incremental lineal. En la Figura IV.8 se ilustra el resultado experimental obtenido en el plano de salida del procesador junto a la simulación numérica con la cual se obtuvo la localización del pico en $p = 0.45$. La Figura IV.9 muestra tres diferentes perfiles (p constante) para los casos experimental y numérico de la figura anterior. En particular, se nota con claridad en la Figura IV.9(b) el pico detectado para ambos casos. A efectos de realizar una comparación cuantitativa entre los picos de detección se utilizaron dos parámetros de mérito convencionales, la razón entre la energía del pico y la energía

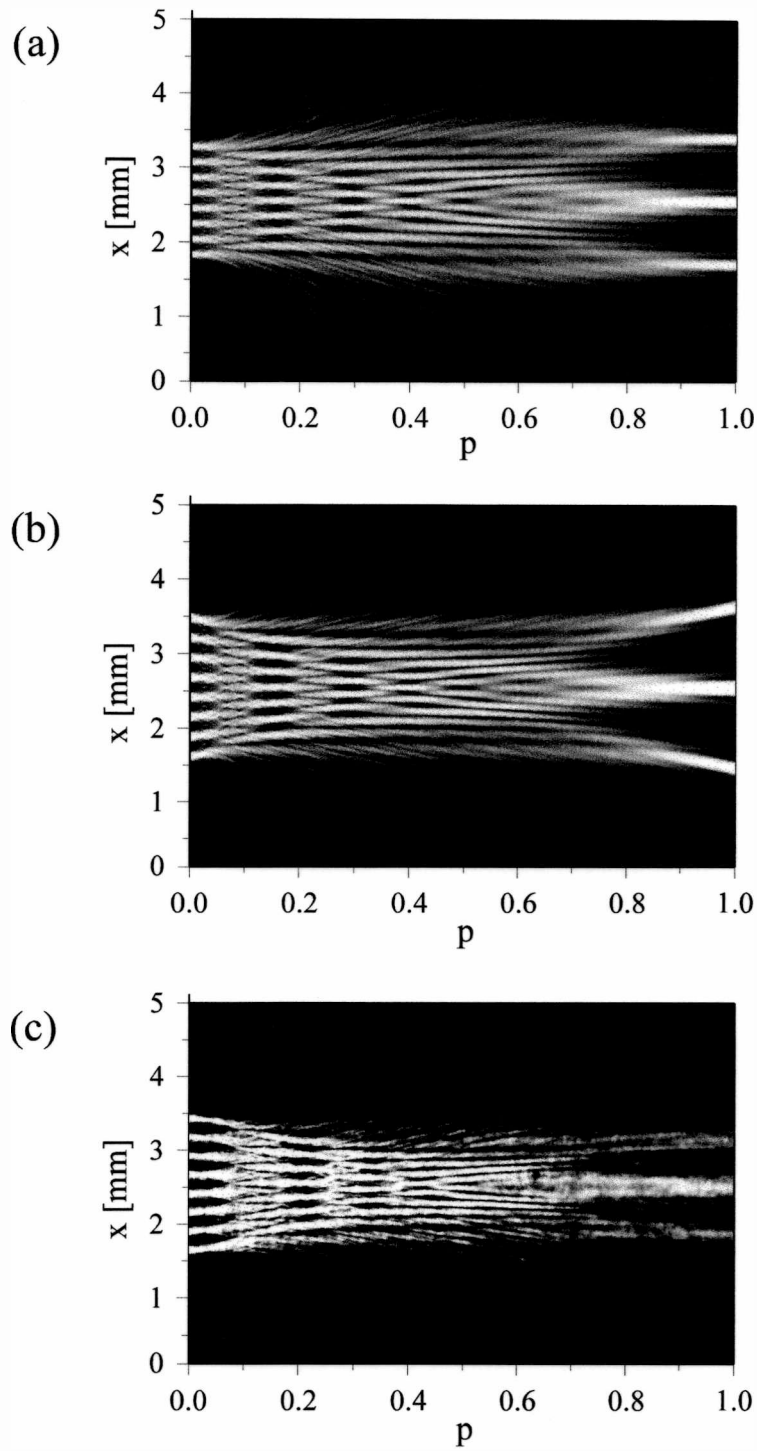


Figura IV.7: Representación de Radon-Wigner de una red de Ronchi de 3 líneas/mm: (a) simulación numérica exacta, (b) simulación numérica con la aproximación propuesta, (c) resultado experimental.

total de la señal (PTE), y la razón entre el valor del pico principal y el valor del pico secundario más importante del perfil de detección (PSLR). Los valores obtenidos son: para el caso teórico $PTE=7\%$ y $PSLR=9$, para el caso experimental $PTE=2\%$ y $PSLR=3$.

Para completar el estudio del comportamiento del procesador fueron obtenidas en forma experimental las representaciones (x,p) de la intensidad del campo luminoso para varias funciones de prueba. En la Figura IV.10 se ilustran las correspondientes a una rendija, a una doble rendija y a una red de Ronchi con una frecuencia espacial de 7 líneas/mm.

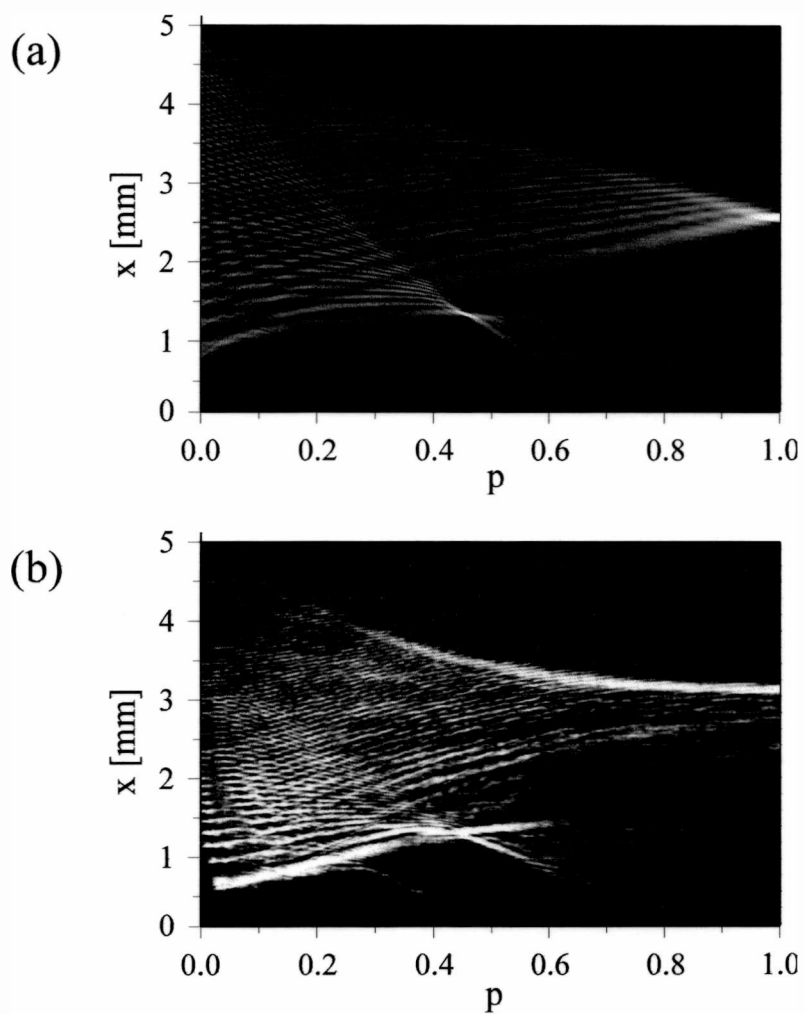


Figura IV.8: Representaciones de Radon-Wigner de una red binaria con frecuencia espacial incremental lineal (chirp): (a) simulación numérica con la aproximación propuesta, (b) resultado experimental.

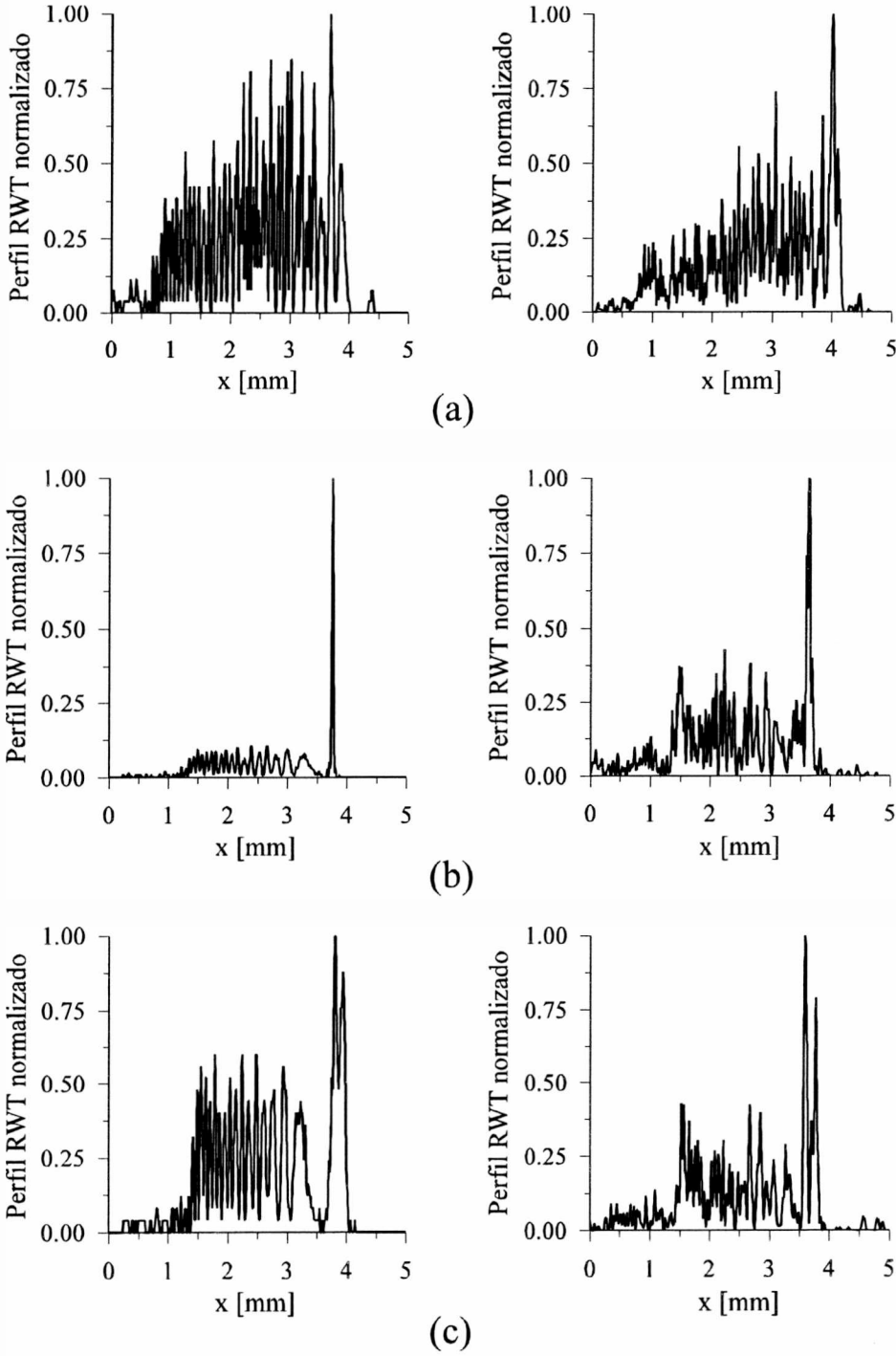


Figura IV.9: Perfiles verticales (p constante) obtenidos de la Figura IV.8 para valores del orden fraccionario: (a) $p = 0.2$, (b) $p = 0.45$, y (c) $p = 0.5$. Las gráficas de la izquierda corresponden a la simulación numérica (Fig. IV.8(a)), mientras que las de la derecha corresponden a los datos experimentales (Fig. IV.8(b)).

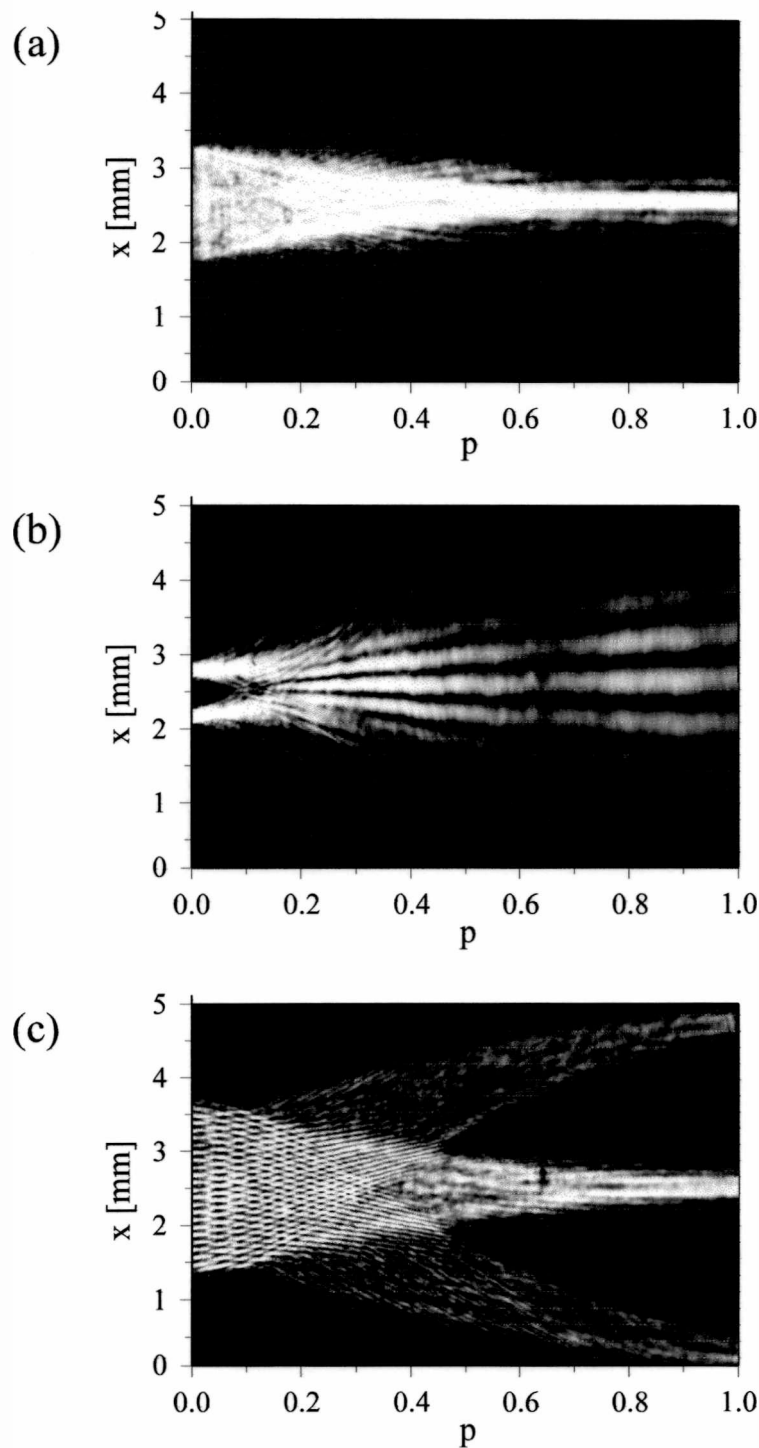


Figura IV.10: Resultados experimentales de la representación (x,p) de la intensidad o representación de Radon-Wigner de: (a) rendija de 2.2 mm, (b) doble rendija de 0.23 mm con una separación de 1.05 mm, y (c) red de Ronchi de 7 líneas/mm.

IV.4 Aplicaciones del formalismo de la FRFT al análisis de calidad de sistemas ópticos

El problema principal que afecta la calidad de los sistemas ópticos formadores de imagen es el de las aberraciones. Estas se describen matemáticamente por medio de la función aberración Φ que representa la diferencia de camino óptico entre el frente de onda con aberración y una onda esférica perfecta. La teoría de aberraciones puede ser tratada en el marco de la óptica geométrica o en el de la teoría de la difracción [32].

Existen varios criterios para especificar la tolerancia de un sistema óptico a las aberraciones y/o a errores de enfoque. El primer criterio fue enunciado por Rayleigh, tomando su nombre. De acuerdo a este criterio la calidad de una imagen es aceptable siempre que el máximo apartamiento del frente de onda respecto de un frente de onda esférico sea menor que un cuarto de la longitud de onda de la luz incidente, es decir

$$|\Phi| \leq \frac{\lambda}{4}. \quad (\text{IV.21})$$

Este criterio es una primera aproximación al estado ideal de un sistema óptico debido a que la distribución luminosa en una imagen no solo depende de la máxima deformación del frente de onda sino también de la forma de éste (tipo de aberración).

Una magnitud que refleja la calidad de una imagen es la razón de Strehl (SR). Esta se define como el cociente entre la intensidad en el foco de la imagen aberrada, I , y de la imagen libre de aberraciones, I_0

$$S = \frac{I}{I_0}. \quad (\text{IV.22})$$

Utilizando el criterio de la razón de Strehl para el caso especial de la aberración esférica, la condición IV.21 puede ser escrita como

$$S \geq 0.8. \quad (\text{IV.23})$$

Cuando la condición IV.21 se aplica a aberraciones de diferente tipo se obtienen distintos valores para la razón de Strehl, por lo que resulta más apropiado

formular un criterio de tolerancia que tenga en cuenta la intensidad en el foco de difracción. El criterio formulado por Marechal utiliza la relación existente entre la intensidad en el centro de la esfera de referencia y la varianza del frente de onda respecto de la misma [32]. De acuerdo con este criterio puede decirse que un sistema óptico está corregido cuando el valor de la razón de Strehl verifica la condición IV.23.

Otro criterio de calidad de los sistemas formadores de imágenes puede obtenerse a partir de la función de transferencia óptica (OTF). Esta resulta útil para clarificar resultados que son difíciles de juzgar a partir de distribuciones de intensidad. Este criterio fue utilizado por Hopkins [49] para evaluar el grado de desenfoque producido por pupilas binarias.

IV.4.1 Relación entre el formalismo de la FRFT y los criterios de calidad en sistemas ópticos

La Figura IV.11 muestra una onda plana incidente de amplitud unidad que ilumina un sistema óptico formador de imágenes representado por la lente L . En los

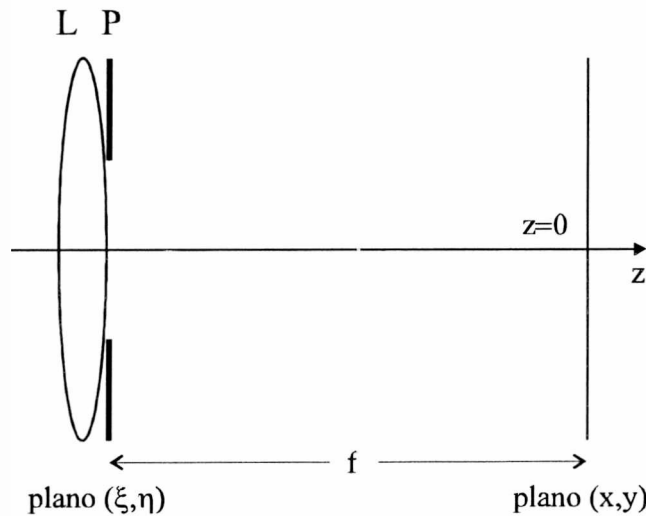


Figura IV.11: Esquema simplificado de un sistema óptico formador de imágenes. Los diversos componentes ópticos son representados por la lente L , y donde P es la pupila de salida del sistema.

alrededores del plano imagen, localizado en $z = 0$, la distribución de amplitud del

campo escalar puede ser escrita como

$$u(x; z) = \int_{-\infty}^{\infty} T(\xi) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda(f+z)} (\xi - x)^2 \right] d\xi, \quad (\text{IV.24})$$

con

$$T(\xi) = t_0(\xi) \exp \left(-\frac{i\pi}{\lambda f} \xi^2 \right), \quad (\text{IV.25})$$

donde $t_0(\xi)$ representa la versión unidimensional de la pupila del sistema P , λ es la longitud de onda de la luz incidente y f es la distancia focal de la lente L . Utilizando las propiedades de la WDF para el pasaje del campo a través de una lente y su propagación en el espacio libre, dadas por las Ecs. (II.21) y (II.25) analizadas en el Capítulo II, las Ecs. (IV.24) y (IV.25) pueden expresarse en término de la WDF como

$$W_u(x, \nu; z) = W_T \left[x - \frac{(f+z)}{f} \nu, \nu \right], \quad (\text{IV.26})$$

$$W_T(x, \nu) = W_{t_0}(x, \nu + x), \quad (\text{IV.27})$$

donde x y ν son coordenadas conjugadas. De la combinación de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$W_u(x, \nu; z) = W_{t_0} \left[x - \frac{(f+z)}{f} \nu, x - \frac{z}{f} \nu \right]. \quad (\text{IV.28})$$

De acuerdo con la Ec. (IV.28) y utilizando la propiedad (II.15a) la intensidad en el eje óptico del sistema de la Figura IV.11 en función de z está dada por

$$\begin{aligned} I(x=0; z) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_u(0, \nu; z) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{t_0} \left[-\frac{(f+z)}{f} \nu, -\frac{z}{f} \nu \right] d\nu. \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Para el caso especial de $z = 0$, la intensidad puede expresarse como

$$\begin{aligned} I_0 &= I(x=0; z=0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{t_0}(-\nu, 0) d\nu, \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

y la razón de Strehl (SR) en función del desenfoque puede ser escrita como

$$\begin{aligned} S(z) &= I(x=0; z)/I_0 \\ &= \frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{\infty} W_{t_0} \left[-\frac{(f+z)}{f} \nu, -\frac{z}{f} \nu \right] d\nu \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Realizando el cambio de variables

$$\zeta = -\frac{z}{f}\nu, \quad (\text{IV.32})$$

la SR como función del desenfoque z toma la forma

$$S(z) = \frac{f}{I_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} W_{t_0} \left[\frac{(f+z)}{z} \zeta, \zeta \right] d\zeta. \quad (\text{IV.33})$$

De esta manera la SR como función de z puede ser analizada en forma polar en el dominio bidimensional de la WDF. Así la SR puede obtenerse como una suma a lo largo de la proyección de la WDF sobre rectas que pasan por el origen de coordenadas y con pendiente dada por: $\tan \theta = (f+z)/z$ [20].

Las propiedades del sistema óptico formador de imágenes puede ser alternativamente descrito mediante el formalismo de la FRFT. De la definición de la FRFT basada en la función de distribución de Wigner, presentada en el Capítulo II, sabemos que si t_p representa la FRFT de orden p de la función pupila t_0 , entonces sus WDF están relacionadas mediante una rotación de los ejes coordenados un ángulo $\phi = p\pi/2$. En ecuaciones:

$$\begin{aligned} t_0(x) &\rightarrow W_{t_0}(x, \nu), \\ t_p(x) &\rightarrow W_{t_p}(x, \nu), \\ W_{t_p}(x, \nu) &= W_{t_0}(x \cos \phi - \nu \sin \phi, x \sin \phi + \nu \cos \phi). \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Aplicando nuevamente la propiedad expresada por la Ec. (II.15a), que permite hallar la intensidad de una señal a partir de su WDF, a la función $t_p(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} |t_p(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{t_p}(x, \nu) d\nu, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{t_0}(x \cos \phi - \nu \sin \phi, x \sin \phi + \nu \cos \phi) d\nu. \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

La Ec. (IV.35) expresa la intensidad de las FRFT unidimensionales de la función pupila de salida del sistema óptico. Esta ecuación puede considerarse como la representación (x,p) o de Radon-Wigner de la función pupila del sistema.

Si sólo tomamos los valores de la representación de Radon-Wigner para $x = 0$, la Ec. (IV.35) se puede escribir

$$|t_p(0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{t_0}(-\nu \sin \phi, \nu \cos \phi) d\nu. \quad (\text{IV.36})$$

Normalizando en forma adecuada $|t_p(0)|^2$, la analogía entre las Ec. (IV.31) y (IV.36) es completa siempre que se verifiquen las siguientes condiciones

$$\sin \phi = \frac{(f+z)}{f}, \quad (\text{IV.37a})$$

$$\cos \phi = -\frac{z}{f}. \quad (\text{IV.37b})$$

De estas dos últimas ecuaciones se obtiene la condición

$$p = \frac{2}{\pi} \arctan \left(-\frac{f+z}{z} \right), \quad (\text{IV.38})$$

con la que se garantiza la siguiente igualdad

$$|t_p(0)|^2 = S'[z(p)]. \quad (\text{IV.39})$$

Se puede concluir entonces que los valores de la razón de Strehl de un sistema óptico con una pupila de salida $t_0(\xi)$, para diferentes valores de desenfoque, se encuentran a lo largo del eje horizontal de la representación de Radon-Wigner de $t_0(\xi)$. En la Figura IV.12 se ilustran diferentes valores del orden fraccionario p que son equivalentes al desenfoque z . Los valores extremos son $p = 1$ que corresponde a la situación en foco ($z = 0$), y $p = 0$ que representa un caso extremo de desenfoque ($z = -f$).

El conocimiento de la SR es útil para analizar el comportamiento y las características de enfoque de un sistema óptico. Para evaluar la calidad de imagen en si misma es más conveniente utilizar la función de transferencia óptica (OTF) del sistema. La información contenida en la OTF también puede ser obtenida a partir de la representación de Radon-Wigner de la función pupila de salida del sistema óptico. Para ésto sólo es necesario realizar una transformada de Fourier unidimensional ordinaria a la función $|t_p(x)|^2$ a lo largo del eje x . Haciendo uso de la expresión integral del operador FRFT unidimensional dado por la Ec. (II.50) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x \{ |t_p(x)|^2 \} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp \left(-\frac{2\pi i x x'}{\lambda f} \right) \times \\ &\times \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi t_0(\xi) \exp \left(\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan \phi} \xi^2 \right) \times \right. \\ &\times \left. \exp \left(-\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \sin \phi} x' \xi \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

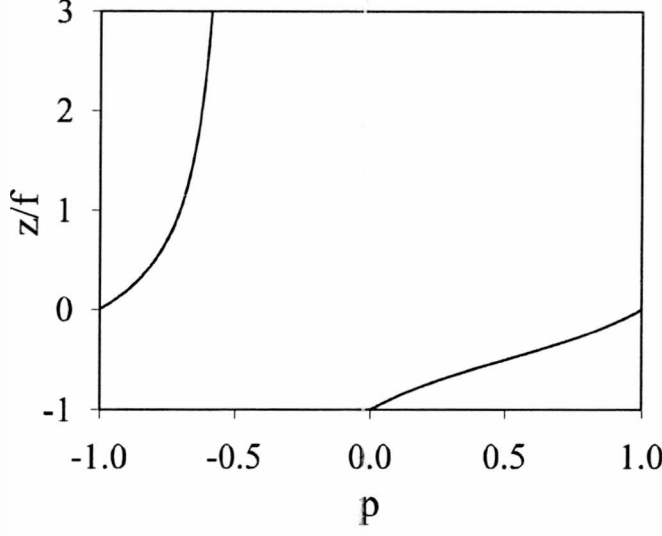


Figura IV.12: Distancia de desenfoque z en función del orden fraccionario p dada por la ecuación $\frac{z}{f} = \frac{-1}{1+\tan(p\pi/2)}$.

donde f es la distancia focal del transformador de Fourier ordinario. La Ec. (IV.40) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x \{ |t_p(x)|^2 \} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' t_0 \left(\xi' + \frac{f_1 x \sin \phi}{2f} \right) t_0^* \left(\xi' - \frac{f_1 x \sin \phi}{2f} \right) \exp \left(\frac{2\pi i \cos \phi x \xi'}{\lambda f} \right) \\ &= A_{t_0} \left(\frac{f_1 x \sin \phi}{f}, \frac{x \cos \phi}{\lambda f} \right), \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

donde $A_{t_0}(\mu, y)$ es la función ambigüedad (AF), la cual es una representación espacio-fase de la señal $t_0(\xi)$. La AF de la función pupila generalizada del sistema óptico puede interpretarse como un diagrama polar de las diferentes OTF asociadas al sistema donde la variable es el desenfoque [50]. Si se denota como $\mathcal{H}(\nu)$ a la OTF, la relación entre ésta y la AF está dada por

$$\mathcal{H}(\nu; w_{20}) = A \left(\nu, y = \frac{2w_{20}\nu}{\lambda v_0^2} \right), \quad (\text{IV.42})$$

siendo w_{20} el coeficiente de desenfoque del frente de onda y ν_0 la frecuencia espacial de corte de la pupila de salida. Haciendo uso del resultado (IV.42) la Ec. (IV.41)

puede escribirse en la forma

$$\mathcal{F}_x \{ |t_p(x)|^2 \} = \mathcal{H} \left(\nu; w_{20} = \frac{\nu_0^2 \cot(p\pi/2)}{2f_1} \right). \quad (\text{IV.43})$$

La Ec. (IV.43) puede obtenerse realizando la transformada de Fourier a lo largo del eje x de la representación de Radon-Wigner de la pupila de salida del sistema óptico $t_0(\xi)$. De esta manera, para un dado valor del orden fraccionario p , la proyección a lo largo del eje vertical de la representación de Radon-Wigner coincide con una OTF desenfocada del sistema óptico.

A efecto de ilustrar las relaciones obtenidas en las Ec. (IV.39) y (IV.43), se ha estudiado, en forma comparativa, la tolerancia al desenfoque de la apertura finita transparente con una obscuración central dada por

$$t_0(\xi) = \text{rect} \left(\frac{\xi}{a} \right) - \text{rect} \left(\frac{\xi}{b} \right), \quad b \leq a. \quad (\text{IV.44})$$

Los tres casos que se han considerado son: (i) una apertura uniforme con $b = 0$; (ii) una apertura anular con $b = 0.52a$; (iii) una apertura anular con $b = 0.80a$. En la Figura IV.13 se muestran las representaciones de Radon-Wigner calculadas numéricamente ((a) y (c)) y obtenidas experimentalmente mediante el arreglo óptico esquematizado en la Figura IV.4 ((b) y (d)), para los casos (i) y (ii). De acuerdo con las Ecs. (IV.38) y (IV.39), la proyección de las representaciones de Radon-Wigner a lo largo del eje $x = 0$ expresa la variación de la razón de Strehl para diferentes valores de z . En la Figura IV.14 se ilustran las curvas de la SR en función del desenfoque para los tres casos de pupilas considerados, obtenidas de representaciones de Radon-Wigner como las de la Figura IV.13. De estos resultados puede observarse, como era de esperar, la mayor tolerancia al desenfoque de las aperturas anulares.

La Figura IV.15 muestra la transformada de Fourier unidimensional, tomada respecto de la coordenada x , de las cuatro representaciones de Radon-Wigner que se ilustran en la Figura IV.13. Del análisis realizado para derivar la Ec. (IV.43), las diferentes OTF desenfocadas están contenidas en proyecciones de la representación de Radon-Wigner a lo largo del eje vertical. Estas OTF desenfocadas son mostradas en las Figuras IV.16 y IV.17, para las pupilas del caso (i) y (ii) respectivamente. En

ambas figuras los valores de p ilustrados son: $p = 0.5$, $p = 0.75$ y $p = 1$, que se corresponden a valores del coeficiente de desenfoque de: $w_{20}/\lambda = 0.99$, $w_{20}/\lambda = 0.40$ y $w_{20}/\lambda = 0$ respectivamente. Tanto en la Figura IV.16 como en la IV.17 se aprecia, como era de esperar, una atenuación en las frecuencias espaciales más altas a medida que aumenta el coeficiente de desenfoque.

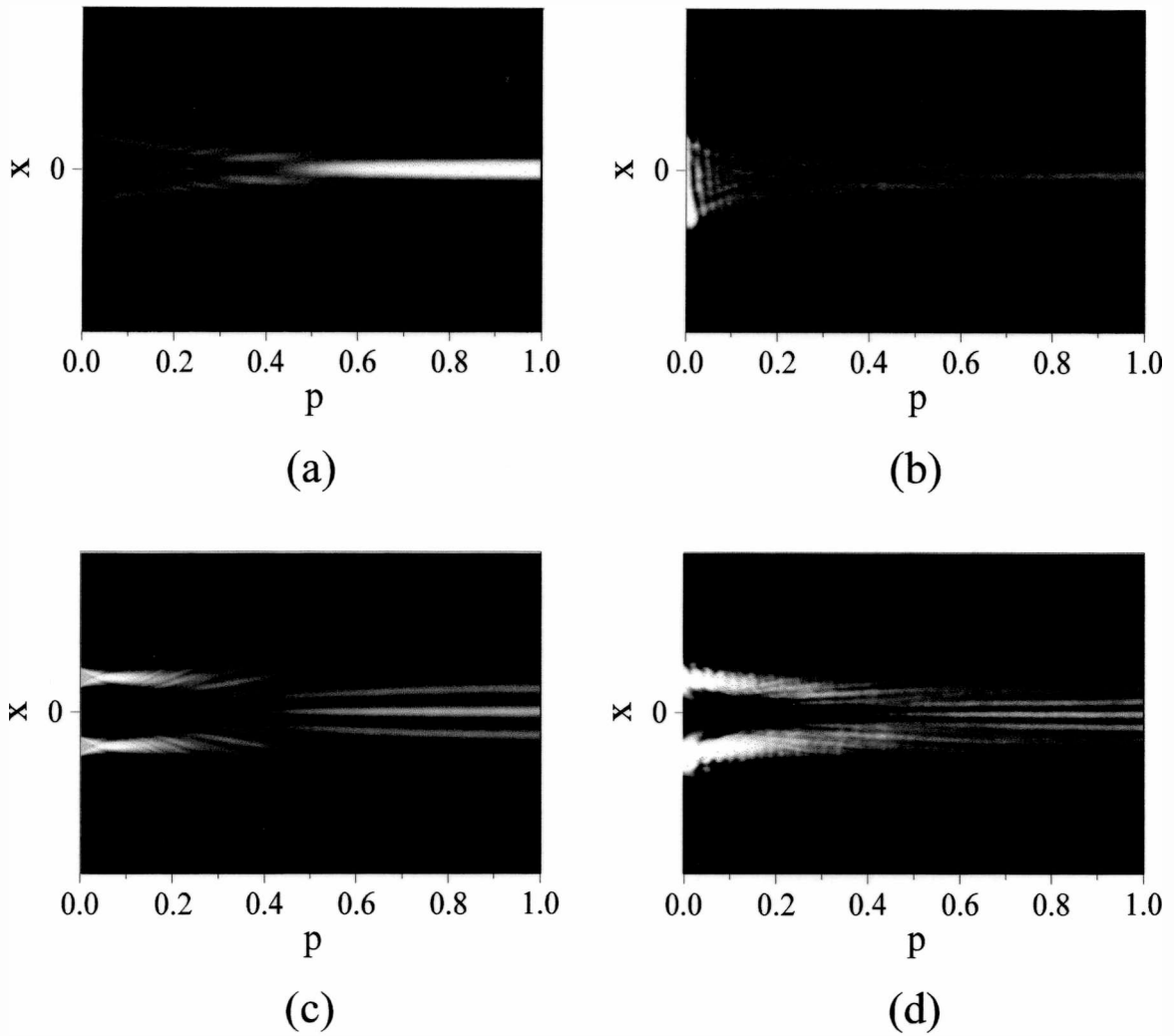


Figura IV.13: Representaciones de Radon-Wigner para la pupila $t_0(\xi)$: (a) Simulación numérica para el caso (i) con $a = 2.5$ mm y $b = 0.0$ mm; (b) resultado experimental correspondiente a (a); (c) simulación numérica para el caso (ii) con $a = 2.5$ mm y $b = 1.3$ mm; (d) resultado experimental correspondiente a (c).

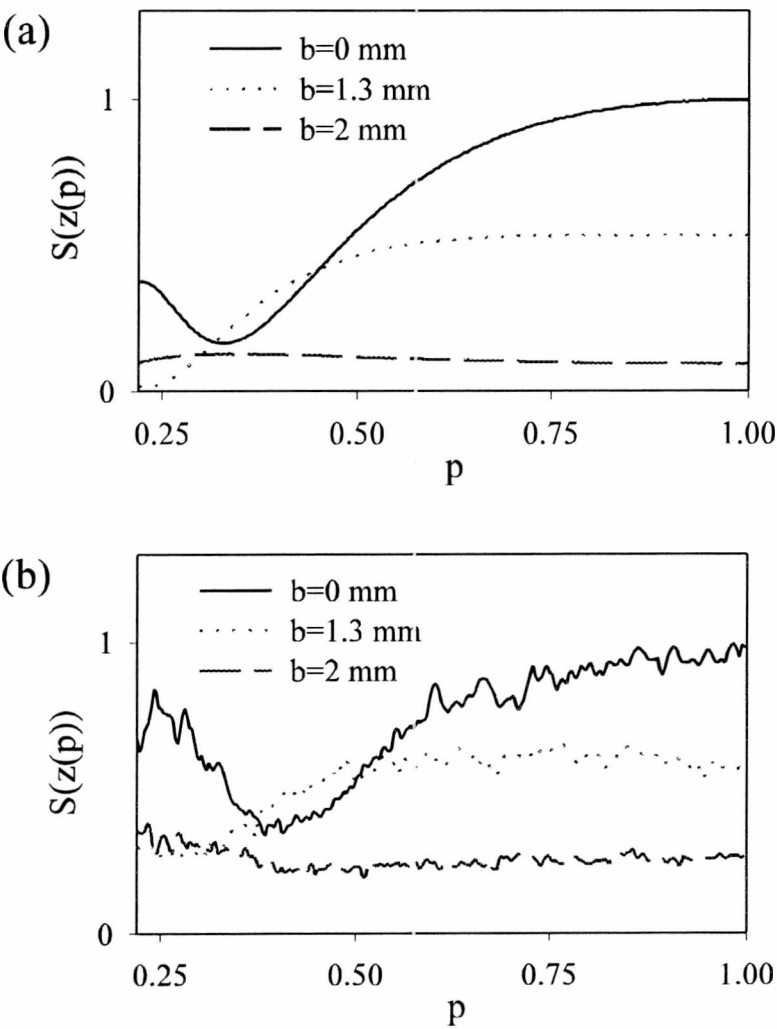


Figura IV.14: Razón de Strehl versus desenfoque para los tres casos de pupilas estudiados. (a) Datos obtenidos mediante una simulación numérica, (b) Datos experimentales.

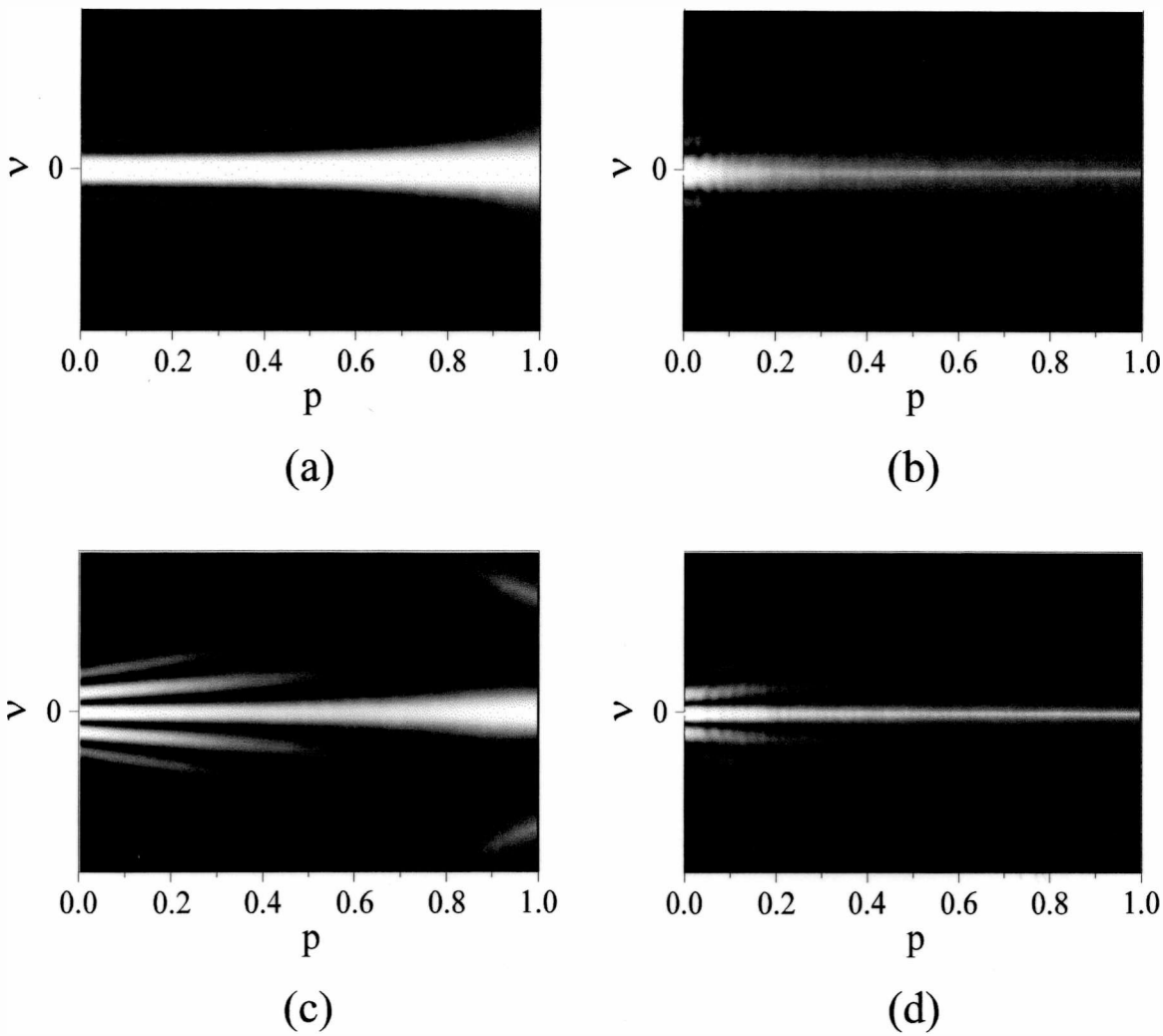


Figura IV.15: Transformadas de Fourier realizadas numéricamente de las representaciones de Radon-Wigner mostradas en la Figura IV.13

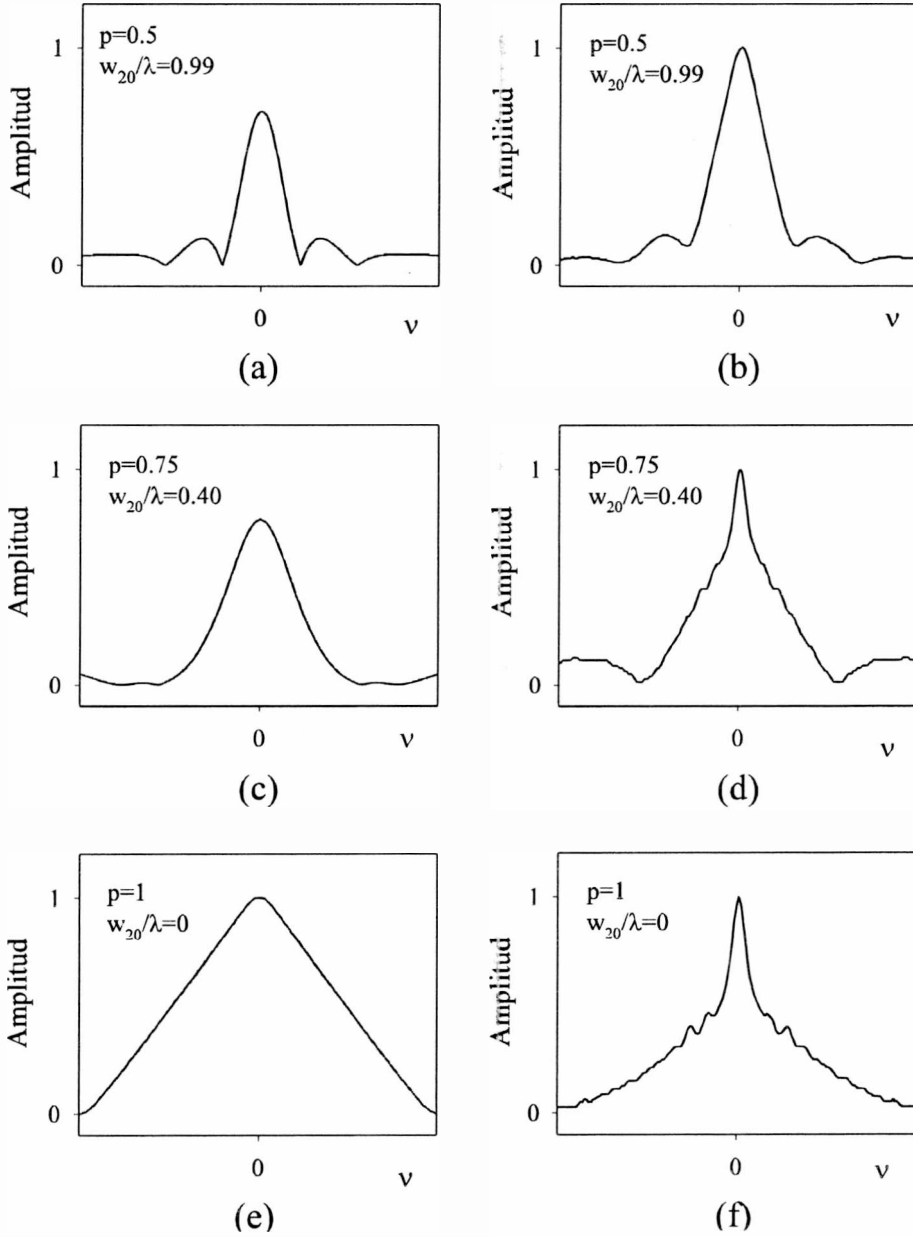


Figura IV.16: Funciones de transferencia óptica (OTF) obtenidas de diferentes proyecciones de las distribuciones de intensidad ilustradas en la Figura IV.15a ((a), (c) y (e)) y Figura IV.15b ((b), (d) y (f)), para una apertura uniforme (caso(i)).

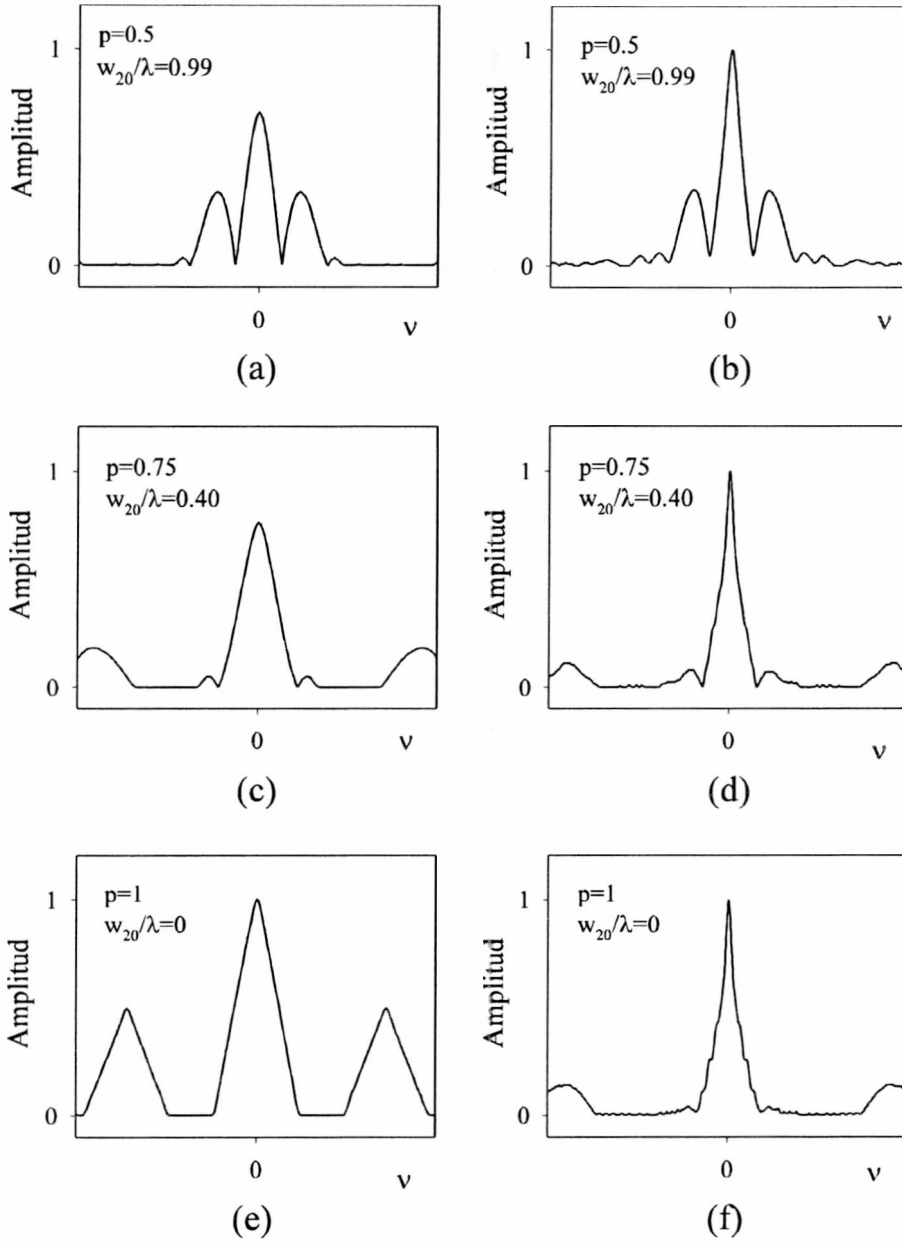


Figura IV.17: Funciones de transferencia óptica (OTF) obtenidas de diferentes proyecciones de las distribuciones de intensidad ilustradas en la Figura IV.15c ((a), (c) y (e)) y Figura IV.15d ((b), (d) y (f)), para una pupila anular (caso(ii)).

IV.4.2 Estudio de la profundidad focal en apodizadores asimétricos

La apodización es el proceso mediante el cual se suprimen los máximos secundarios o también llamados lóbulos laterales de un patrón de difracción. Este procedimiento es utilizado con el objeto de incrementar el poder resolvente de los sistemas ópticos formadores de imagen mediante el mejoramiento de la función de punto extendido o a fin de aumentar la profundidad focal. El estudio y diseño de apodizadores es un problema clásico de la óptica ondulatoria [51, 52]. Cuando la distribución del campo en el plano de la apertura apodizadora es simétrica, la supresión de los lóbulos laterales es lograda a costa del ensanchamiento del pico central de difracción. Este es el caso de la llamada apodización simétrica.

La apodización asimétrica, propuesta por Cheng y Siu [53], consiste en utilizar una apertura asimétrica de manera de suprimir los lóbulos laterales a un lado del pico central a cambio de incrementarlos en el lado opuesto. Si como apertura es utilizada una rendija unidimensional y uniforme de ancho a , la función de punto extendido (PSF) resulta una función *sinc*. Para realizar la apodización asimétrica se adjuntan a cada lado de la rendija dos bandas angostas de ancho b y de transmitancias opuestas i y $-i$. En la Figura IV.18 se muestra la función transmitancia resultante.

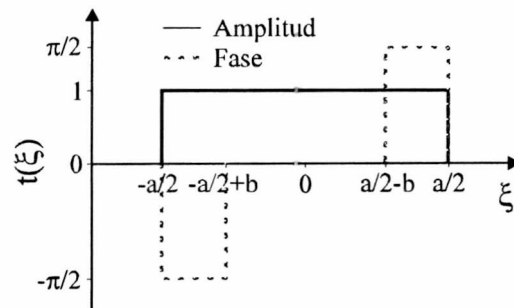


Figura IV.18: Amplitud y fase de la pupila apodizada

Esta apertura produce una PSF también asimétrica que puede dividirse en dos zonas. En la zona positiva los lóbulos laterales son suprimidos siendo la PSF mucho más

plana que antes de la apodización. En cambio, en la zona negativa, la PSF resulta deteriorada como contraparte del mejoramiento logrado en la zona positiva. Para el caso de la apertura considerada existe una relación entre los parámetros a y b que minimiza la intensidad de los lóbulos laterales en la zona positiva. Esta relación es: $b = 0.056a$ [54].

Como se ha analizado en la sección anterior la razón de Strehl es una herramienta eficaz con la cual es posible caracterizar la calidad de los sistemas ópticos formadores de imagen. En particular, el conocimiento de este parámetro en función del desenfoque permite conocer la profundidad de foco del sistema. Sea $t(\xi)$ la pupila apodizadora unidimensional dada por

$$t(\xi) = \begin{cases} -i & -\frac{a}{2} \leq \xi < -\frac{a}{2} + b \\ 1 & -\frac{a}{2} + b \leq \xi \leq \frac{a}{2} - b \\ i & \frac{a}{2} - b < \xi \leq \frac{a}{2} \end{cases}, \quad (\text{IV.45})$$

ilustrada en la Figura IV.18. Puede observarse que para condiciones de apodización nula ($b = 0$) la pupila es una apertura rectangular uniforme, $t(\xi) = \text{rect}(\xi/a)$. La Ec. (IV.39) relaciona la proyección de la representación de Radon-Wigner de la pupila a lo largo del eje horizontal $x = 0$ con la razón de Strehl en función del desenfoque z , siempre que se verifique

$$p = \frac{2}{\pi} \arctan \left(-\frac{z' + z}{z} \right),$$

donde z' es la distancia, a lo largo del eje óptico, entre el plano de la pupila $t(\xi)$ y el plano focal. De la ecuación anterior, el intervalo de variación de p necesario para obtener la razón de Strehl para desenfoques entre $z = -z'$ y $z \rightarrow \infty$ es

$$0 \leq p \leq \frac{3}{2}.$$

En la Figura IV.19 se muestran las representaciones de Radon-Wigner para la pupila $t(\xi)$ con $a = 10.5$ mm para los casos: (i) apodización nula ($b = 0$) y (ii) apodización máxima ($b = 0.58$ mm). La proyección de ambas representaciones a lo largo del eje vertical $p = 1$ permite obtener las PSF del sistema. La Figura IV.20(a) ilustra las PSF de la pupila $t(\xi)$ para los dos casos considerados. Puede apreciarse en esta figura la disminución notable de uno de los lóbulos laterales de la PSF, en el caso de la pupila

apodizada, a expensas del incremento en el otro. Por último en la Figura IV.20(b) puede observarse la SR en función del desenfoque en unidades de z' para la pupila $t(\xi)$ obtenida a partir de los diagramas de la Figura IV.19 y mediante las Ec. (IV.38) y (IV.39). De la Figura IV.20(b) se observa que si bien la SR de la pupila disminuye, debido al proceso de apodización, su tolerancia a los desenfoques aumenta.

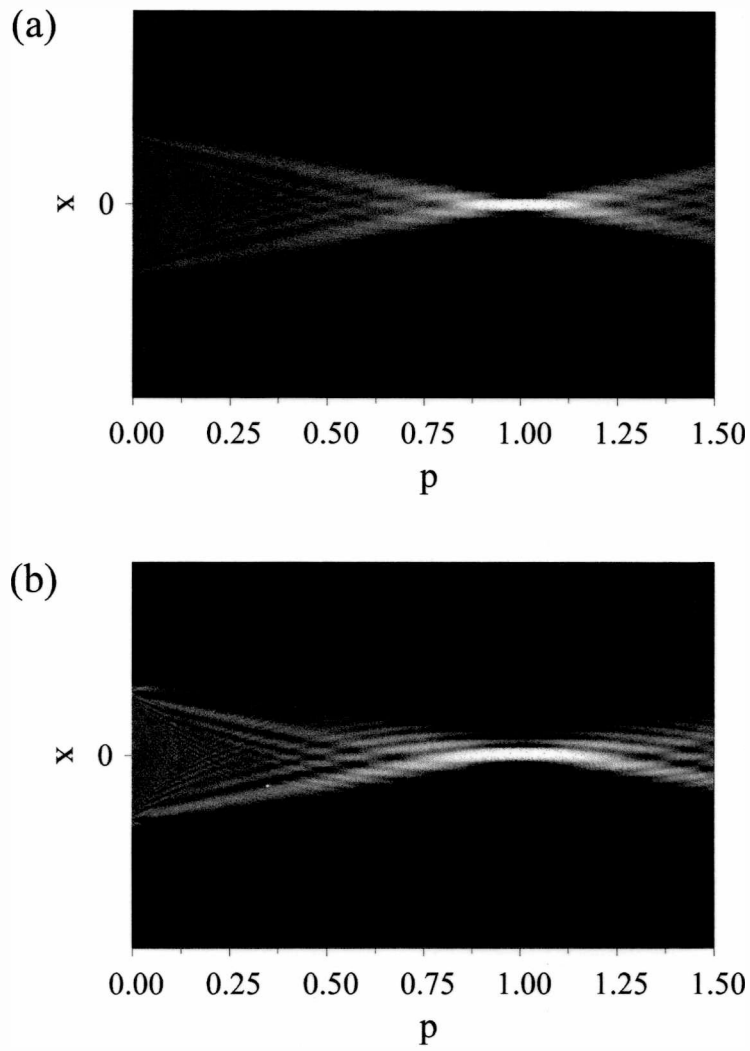


Figura IV.19: Representaciones de Radon-Wigner correspondientes a: (a) pupila no apodizada (caso (i): $b = 0$), (b) pupila apodizada (caso (ii): $b = 0.58$ mm).

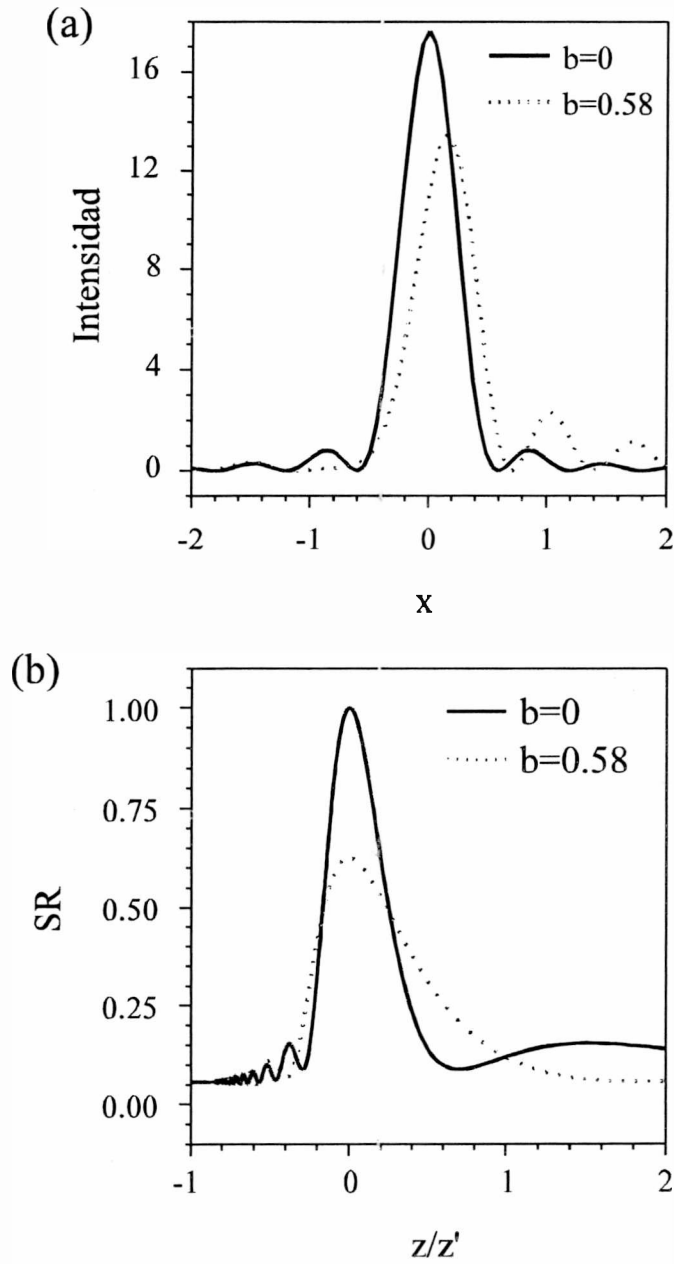


Figura IV.20: (a) PSF de la pupila $t(\xi)$ para ambos casos considerados. (b) Razón de Strehl versus distancia de desenfoque para ambos casos considerados.

Capítulo V

La correlación óptica fraccionaria

V.1 Introducción

El producto de correlación es una de las diversas operaciones matemáticas que pueden ser implementadas ópticamente. Este producto es un caso especial de convolución y entre sus aplicaciones en óptica se puede mencionar al reconocimiento de patrones como la más importante. La correlación óptica se puede generar fácilmente gracias a la capacidad que tienen los sistemas ópticos coherentes de realizar transformaciones de Fourier. Los ejemplos más importantes de correladores ópticos son: la configuración 4- f de VanderLugt y el correlador de transformada conjunta [55, 56]. Debido a la característica de invariancia translacional que tiene el producto de correlación, cuando el objeto se traslada en el plano de entrada del correlador la señal de correlación simplemente hace lo mismo en el plano de salida sin que se produzcan alteraciones en su forma. En muchos casos esta propiedad es necesaria, pero hay situaciones en las cuales la posición del objeto es una condición adicional de codificación, y la invariancia espacial puede ser una desventaja. Varios métodos han sido propuestos a fin de evitar la invariancia espacial en la detección de patrones. Uno de ellos utiliza como filtro hologramas de volumen con la consiguiente ruptura de la invariancia translacional [57]. Otros métodos usan haces de referencia codificados en fase y patrones de difracción de Fresnel [58, 59].

La correlación fraccionaria es una generalización de la correlación ordinaria basada en el formalismo de la FRFT. En la primera definición se la asoció a la

correlación ordinaria del producto de dos FRFT [11], en la segunda a la FRFT de la multiplicación de una FRFT con un filtro adaptado [60, 61]. Como se ha visto en capítulos anteriores la FRFT cambia el contenido de información de la señal de puramente espacial a puramente espectral conforme el orden fraccionario p varia de 0 a 1. Por lo tanto, filtros holográficos que almacenen información de la FRFT, en vez de la transformada de Fourier ordinaria ($p = 1$), pueden ser usados para construir correladores sensibles a los cambios de localización.

En la segunda sección de este capítulo se definirá la correlación fraccionaria y mencionarán algunas de sus propiedades. En la tercera sección se describirá el funcionamiento de un correlador de VanderLugt fraccionario que utiliza un cristal fotorefractivo como medio de registro holográfico [62]. Finalmente, en la cuarta sección, se discutirá una generalización de la correlación fraccionaria y se presentará un correlador fraccionario, sensible a las translaciones, que puede ajustarse en forma flexible para el reconocimiento de variaciones en la escala del objeto [63].

V.2 Definición de la correlación fraccionaria

El producto de correlación ordinario entre las funciones $u_0(x)$ y $v_0(x)$ se define como

$$\begin{aligned} C^1(x) &= u_0(x) \otimes v_0(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0) v_0^*(x_0 - x) dx_0, \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

o bien

$$\begin{aligned} C^1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\nu) v_1^*(\nu) \exp(2\pi i x \nu) d\nu \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{u_1(\nu) v_1^*(\nu)\}, \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

donde $u_1(\nu) = \mathcal{F}^1 \{u_0(x_0)\}$ y $v_1(\nu) = \mathcal{F}^1 \{v_0(x_0)\}$. De la definición espectral dada por la Ec. (V.2) puede verse que para obtener la correlación de dos objetos, primero hay que realizar la transformada de Fourier de ambos, luego tomar el complejo conjugado de uno de ellos, multiplicar los resultados y finalmente realizar una transformada de Fourier inversa.

La correlación ordinaria puede generalizarse utilizando el formalismo de la FRFT. Para esto se debe reemplazar en la Ec. (V.2) a las transformadas de Fourier ordinarias por las fraccionarias

$$u_1(\nu) \rightarrow u_p(x') = \mathcal{F}^p \{u_0(x_0)\} \quad (\text{V.3a})$$

$$v_1(\nu) \rightarrow v_p(x') = \mathcal{F}^p \{v_0(x_0)\}. \quad (\text{V.3b})$$

La correlación fraccionaria de orden p queda así definida como

$$C^p(x) = \mathcal{F}^{-1} \{u_p(x')v_p^*(x')\}. \quad (\text{V.4})$$

Esta definición verifica el requerimiento básico

$$\text{si } p = 1, \quad C^p(x) \rightarrow C^1(x), \quad (\text{V.5})$$

con $C^1(x)$ dado por la Ec. (V.2). La única diferencia entre la correlación fraccionaria y la ordinaria se encuentra en que el primer paso de la obtención está basado en la FRFT en vez de en la transformada de Fourier ordinaria. Como la FRFT contiene información mixta espacial-espectral de la señal, la correlación por ella definida exhibe un comportamiento diferente al de su contraparte ordinaria, como por ejemplo la ruptura de la invariancia translacional.

La obtención de la correlación fraccionaria puede resumirse en las siguientes etapas:

- (1) Realizar la FRFT de las funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$
- (2) Hallar el complejo conjugado de la función $v_p(x')$
- (3) Multiplicar los resultados de las etapas (1) y (2) ($u_p(x')v_p^*(x')$)
- (4) Realizar la transformada inversa de Fourier al resultado de la etapa (3)

La implementación óptica de las cuatro etapas puede ser realizada mediante un arreglo como el esquematizado en la Figura V.1. La primera parte del dispositivo es análogo al de la Figura II.6 y permite obtener, en el plano del filtro, la FRFT de orden p de la transparencia situada en el plano objeto. El filtro H es un filtro adaptado que contiene almacenada la función

$$H(x') = v_p^*(x'). \quad (\text{V.6})$$

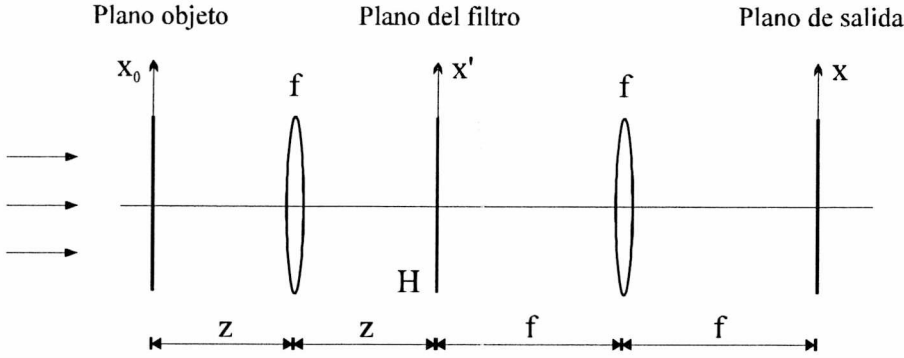


Figura V.1: Arreglo óptico para generar la correlación fraccionaria

En el plano de éste se realiza la multiplicación $u_p(x')v_p^*(x')$ y posteriormente la segunda lente del sistema realiza la transformada de Fourier para obtener la correlación fraccionaria en el plano de salida.

V.3 Correlador óptico sensible a las translaciones

Como ha sido mencionado el correlador óptico de Vandelugt detecta similitudes entre un objeto determinado y un objeto de referencia. Esta referencia es almacenada como información puramente espectral en un filtro holográfico. De esta forma, el correlador resulta espacialmente invariante. Es posible generalizar el correlador de Vandelugt para almacenar en el filtro holográfico la FRFT del objeto de referencia obteniéndose un instrumento que simultáneamente detecte similitudes y posiciones con diferente grado de sensibilidad.

En la Figura V.2 se ilustra el esquema del dispositivo experimental desarrollado. Este es un correlador de Vandelugt modificado que utiliza, como medio de registro holográfico a tiempo real, un cristal de $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) que tiene propiedades fotorefractivas. La placa de material fotorefractivo H almacena el patrón de interferencia producido entre el haz de referencia y la FRFT del objeto O . Esta operación es realizada mediante la lente L_1 , como fue mencionado en la sección anterior. Por simplicidad se ha supuesto una transparencia objeto de referencia unidimensional $t_0(x_0)$.

La distribución de intensidad registrada en el plano del filtro puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 I_H(x') &= |U^r(x', \theta) + \mathcal{F}^p \{t_0(x_0)\}|^2 \\
 &= \left| U^r(x', \theta) + \exp\left(\frac{i\pi x'^2}{\lambda f_1 \tan \phi}\right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i\pi x_0^2}{\lambda f_1 \tan \phi}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i x' x_0}{\lambda f_1 \sin \phi}\right) dx_0 \right|^2, \quad (V.7)
 \end{aligned}$$

donde $U^r(x', \theta)$ es la amplitud de haz de referencia. El orden p de la FRFT de la función $t_0(x_0)$ puede seleccionarse de acuerdo con las relaciones $f_0 = f_1 / \sin \phi$ y $z = f_1 \tan(\phi/2)$, donde f_0 es la distancia focal de la lente L_1 , f_1 es un parámetro de escala y $\phi = p\pi/2$. Para $p = 1$, la Ec. (V.7) se reduce al clásico filtro holográfico de VanderLugt.

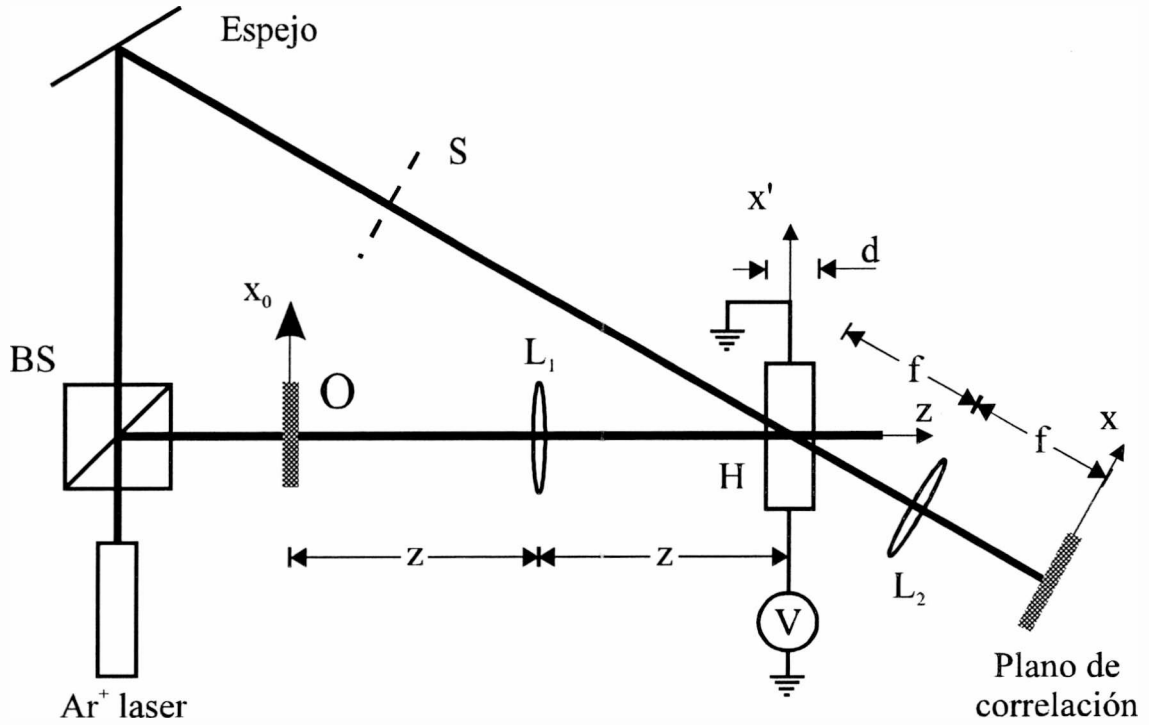


Figura V.2: Arreglo experimental del correlador óptico fraccionario.

En una segunda etapa, el obturador S extingue el haz de referencia y la transparencia a correlacionar $t'_0(x_0)$ es colocada en lugar de la referencia $t_0(x_0)$, de

tal manera, que el cristal fotorefractivo solo es iluminado por $t'_p(x') = \mathcal{F}^p \{t'_0(x_0)\}$. Una segunda lente, de distancia focal f , realiza la transformada de Fourier ordinaria de uno de los cuatro términos de la amplitud transmitida por el filtro H , la cual es proporcional a la expresión dada por la Ec. (V.7). Así, en el plano focal posterior de la lente L_2 , se obtiene, como señal de salida, la intensidad de la correlación fraccionaria dada por

$$I(x) = \left| \mathcal{F}^1 [\mathcal{F}^p \{t'_0(x_0)\} \mathcal{F}^p \{t_0(x_0)\}^*]_{(x/\lambda f)} \right|^2. \quad (\text{V.8})$$

Se ha elegido un cristal fotorefractivo como medio de registro debido a su capacidad para almacenar patrones de intensidad luminosa, como variaciones en su índice de refracción, sin necesidad de revelado químico. Esto lo hace especialmente apto para el registro en tiempo real y por ello son ampliamente utilizados en el procesamiento óptico [64]. Un ejemplo de aplicación de este tipo de cristales en correladores ópticos del tipo VandeLugt puede verse en la Ref. [65]. Los cristales del tipo de las silenitas, como el BGO, combinan alta sensibilidad y respuestas rápidas con la reversibilidad propia de este tipo de registros [66, 67].

Como fuente luminosa fue utilizado un haz de laser de argón de longitud de onda $\lambda = 514 \text{ nm}$ colimado y expandido. Mediante el divisor de haz BS se obtuvieron dos haces coherentes con un ángulo entre ellos de $\theta \cong 7.4^\circ$. Uno de ellos fue utilizado como haz de referencia mientras que el otro fue usado para iluminar la transparencia de referencia O . El filtro holográfico fue sintetizado mediante la interferencia entre el haz de referencia y la FRFT de orden p , la cual fue generada, por intermedio de la lente L_1 de distancia focal $f_0 = 570 \text{ mm}$, sobre el cristal fotorefractivo BGO. A efecto de mejorar la eficiencia de difracción en el cristal fue aplicada una tensión de $V = 8 \text{ kV}$ entre las caras [110]. Al ser la separación de ambas caras de $t = 10 \text{ mm}$, el campo eléctrico aplicado al cristal fue $E_c = 0.8 \text{ kV/mm}$. El cristal está cortado de manera que las direcciones cristalográficas $\langle 1\bar{1}0 \rangle$, $\langle 001 \rangle$ y $\langle 110 \rangle$ coinciden con sus bordes y d es el espesor a lo largo de la dirección $\langle 1\bar{1}0 \rangle$. En los procesos de registro (escritura) y lectura del filtro fue utilizada una intensidad efectiva del haz de 20 mW/cm^2 .

Una vez finalizado el registro del filtro H el obturador S fue cerrado, bloque-

ando el haz de referencia. Debido a que el objetivo de experimento fue el de estudiar el efecto de la correlación fraccionaria ante translaciones del objeto, la transparencia de referencia, previos desplazamientos controlados, fue utilizada como transparencia objeto, siendo iluminada con la misma longitud de onda. En el registro del filtro fue utilizada una transparencia con un carácter "S" de 2 mm de alto y 1.5 mm de ancho. El patrón de franjas de interferencia creadas por la superposición de la FRFT y el haz de referencia fueron grabadas por un período de 3 minutos. Luego, el filtro fue leído en forma secuencial por la FRFT del objeto a reconocer. Durante el proceso de lectura el patrón objeto O fue trasladado en forma perpendicular al eje óptico, una longitud fija entre registros sucesivos, utilizando para esto un trasladador lineal comandado por una computadora. Las imágenes del plano de salida fueron adquiridas mediante una cámara CCD, digitalizadas con una placa de video que discrimina 256 niveles de intensidad, y almacenadas en una computadora.

A fin de demostrar la sensibilidad a las translaciones de la correlación fraccionaria, se tomaron medidas de la correlación entre el objeto de referencia y versiones desplazadas de éste. Los desplazamientos fueron realizados manteniendo constante la posición del plano objeto y su perpendicularidad respecto del eje óptico. Sin embargo, el haber utilizado como filtro un holograma de volumen, de por si provoca una ruptura de la invariancia espacial en la correlación [57]. Esto es así porque los hologramas de volumen experimentan limitaciones de posicionamiento producidas por la difracción de Bragg y debidas al ancho finito del medio de registro d . En otras palabras, si el haz de lectura no coincide con el haz de escritura, aparece un desfase que reduce la eficiencia de difracción. Por lo tanto, en este caso en particular, el efecto contribuye a disminuir la intensidad del pico de correlación en adición a la natural disminución provocada por el carácter fraccionario de la transformada de Fourier.

En las Figuras V.3 y V.4 se muestran los valores experimentales de la intensidad del pico de correlación para diferentes desplazamientos de la transparencia objeto. Las Figuras V.3(a) y V.4(a) corresponden al caso de registro holográfico en un cristal de espesor $d = 1$ mm, mientras que para las Figuras V.3(b) y V.4(b) $d = 3$ mm. En cada gráfico pueden observarse datos correspondientes al ajuste del correlador para tres valores del orden fraccionario p . Los datos experimentales que se

muestran en la Figura V.3, corresponden al desplazamiento de la transparencia objeto a lo largo del eje x_0 . Debido a la invariancia translacional, propia de la transformada

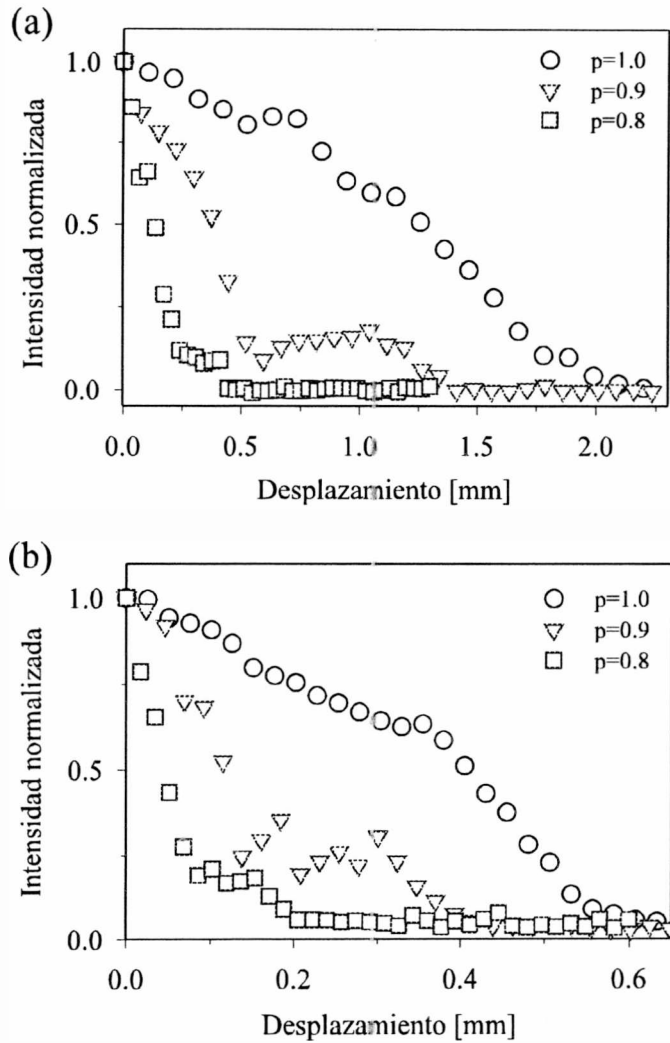


Figura V.3: Intensidad del pico de correlación versus la distancia lateral de desplazamiento para un cristal de registro de ancho: (a) $d = 1$ mm, (b) $d = 3$ mm.

de Fourier ordinaria, los puntos para el caso $p = 1$ deberían mantener un valor constante. Sin embargo, se observa un decrecimiento en la intensidad de la correlación en concordancia con el error de Bragg producido en el desplazamiento.

La amplitud del coeficiente de difracción decrece a medida que aumenta la distancia de translación como una función *sinc*. El ancho de ésta función es proporcional al

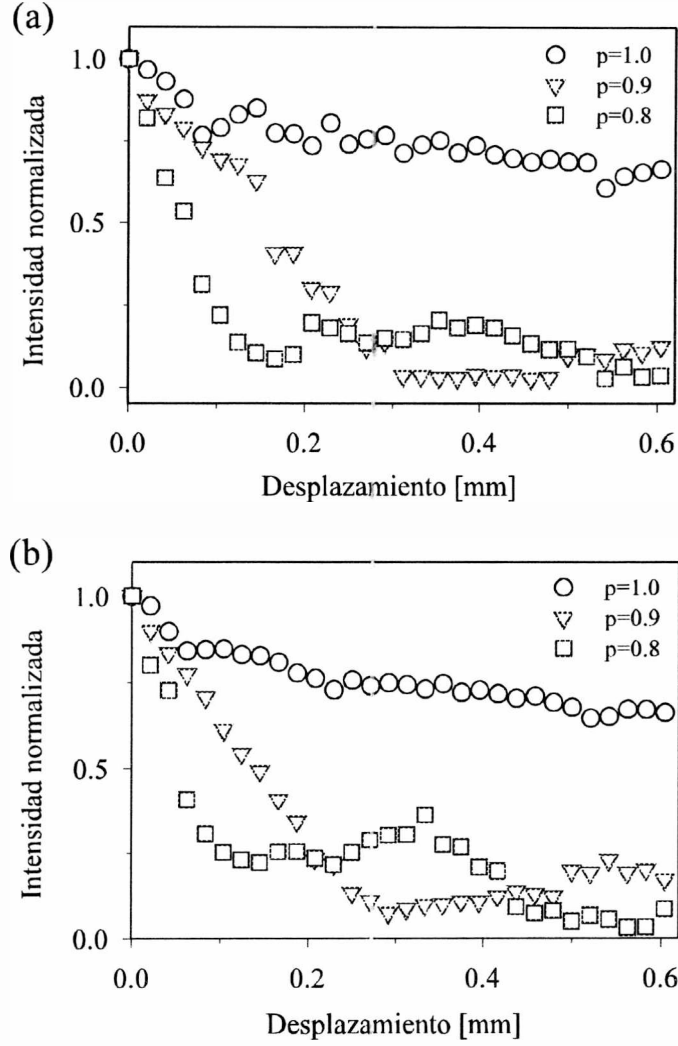


Figura V.4: Intensidad del pico de correlación versus la distancia de desplazamiento perpendicular al plano $x_0 - z$ para un cristal de registro de ancho: (a) $d = 1$ mm, (b) $d = 3$ mm.

cuadrado de la distancia focal de la lente empleada e inversamente proporcional al desplazamiento y al ancho del cristal [66]. En el caso de la Figura V.3(b) se observa una reducción de la tolerancia al desplazamiento en comparación con el caso de la Figura V.3(a) para un mismo nivel de intensidad del pico de correlación.

Para los casos correspondientes a $p = 0.9$ y $p = 0.8$, puede notarse una disminución de la intensidad más pronunciada. En esos casos aparece, sumado al error de Bragg, el efecto de la inherente variancia translacional que tiene la correlación fraccionaria. Puede observarse que en la Figura V.3 los datos correspondientes a un mismo valor de p tienen el mismo comportamiento, sin embargo, existe un diferente factor de escala global producto del cambio en el espesor del cristal.

En la Figura V.4 se muestra la intensidad correlación normalizada para el caso en que la transparencia objeto es desplazada en forma perpendicular al plano x_0-z . Tales translaciones no producen errores de Bragg debido a que las redes de índice de refracción almacenadas en el cristal tienen sus vectores de onda perpendiculares a la dirección de los desplazamientos. La intensidad difractada es prácticamente insensible a los efectos producidos por el registro de un holograma de volumen, y la situación puede compararse a la que existiría en el caso de un holograma plano. En la Figura V.5 se ilustra el cálculo numérico de la correlación fraccionaria de orden $p = 1$, $p = 0.9$, y $p = 0.8$, en función del desplazamiento para un holograma plano ($d = 0$).

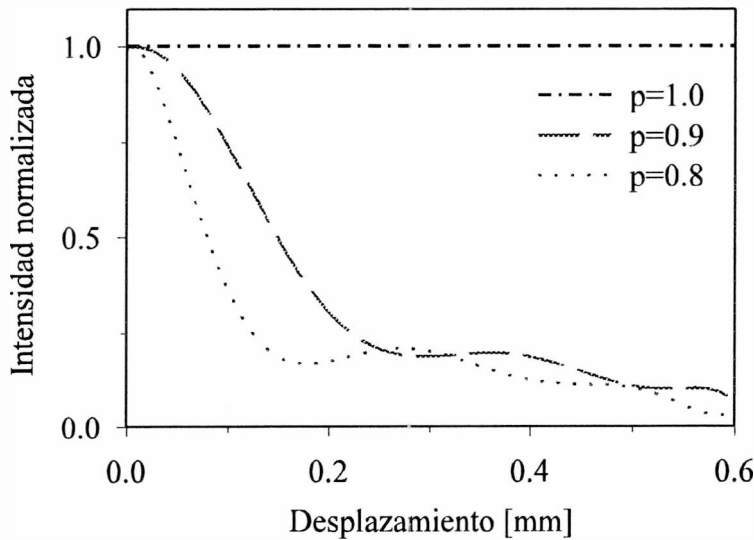


Figura V.5: Cálculo numérico de la intensidad del pico de correlación en función del desplazamiento del objeto para un filtro holográfico plano ($d = 0$).

Aquí se puede observar claramente la invariancia translacional propia de la correlación

ordinaria ($p = 1$). Mientras que para $p < 1$, aparece una disminución del valor del pico de correlación a medida que la distancia de corrimiento se incrementa. En la Figura V.4 (a) y (b), los datos experimentales para los valores $p = 0.9$ y $p = 0.8$ son aceptablemente parecidos a los valores computados de la Figura V.5. En esta figura puede verse claramente que la distribución de datos experimentales no depende del espesor del cristal sino solamente del orden fraccionario p . Por último, puede mencionarse que a causa de la naturaleza dinámica del almacenamiento en los cristales fotorefractivos, la información registrada se degrada lentamente como resultado de la difusión de cargas y del proceso de lectura. Estos efectos contribuyen a que el valor de la intensidad del pico de correlación decrezca suavemente para el valor $p = 1$ como lo muestran los datos experimentales en la Figura V.4.

V.4 Generalización de la correlación fraccionaria

La definición de correlación fraccionaria expresada en la Ec. (V.4), puede generalizarse para el caso en que los órdenes de las FRFT involucradas no sean iguales. Una expresión más general para éste operador es

$$\begin{aligned} C^{p,q,r}(x) &= \mathcal{F}^p \{ \mathcal{F}^q \{ u_0(x_0) \} \mathcal{F}^r \{ v_0(x_0) \}^* \} \\ &= \mathcal{F}^p \{ u_q(x') v_r^*(x') \}. \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

La Ec. (V.9) se convierte en la correlación ordinaria en el caso en que $p = -1$ y $q = r = 1$. También puede notarse que esta nueva definición incluye a la dada por la Ec. (V.4) como un caso particular en el cual $p = -1$ y $q = r$.

A efecto de derivar una expresión para la correlación fraccionaria, se reemplazan los operadores de las FRFT en la Ec. (V.9) por su forma integral dada por la Ec. (II.50). Así, se obtiene

$$\begin{aligned} C^{p,q,r}(x) &= \exp \left(\frac{i\pi x^2}{\lambda f_1 \tan \phi_1} \right) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'_0) \exp \left(\frac{i\pi x_0'^2}{\lambda f_1 \tan \phi_2} \right) dx'_0 \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} v_0^*(x''_0) \exp \left(-\frac{i\pi x_0''^2}{\lambda f_1 \tan \phi_3} \right) dx''_0 \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{i\pi x_0^2}{\lambda f_1} \left(\frac{1}{\tan \phi_1} + \frac{1}{\tan \phi_2} - \frac{1}{\tan \phi_3} \right) \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left[-\frac{2\pi i x_0}{\lambda f_1} \left(\frac{x}{\sin \phi_1} + \frac{x'_0}{\sin \phi_2} - \frac{x''_0}{\sin \phi_3} \right) \right] dx_0, \quad (\text{V.10})$$

donde

$$\phi_1 = p \frac{\pi}{2}, \quad \phi_2 = q \frac{\pi}{2}, \quad \phi_3 = r \frac{\pi}{2}. \quad (\text{V.11})$$

Para el caso espectral puro $p = -1$, $q = r = 1$, la Ec. (V.10) da como resultado un agudo pico de correlación siempre que $u_0(x_0) = v_0(x_0 + \Delta)$, donde Δ representa el desplazamiento entre las dos funciones a correlacionar. Para otros valores de los órdenes fraccionarios, la Ec. (V.10) se vuelve sensible tanto a la forma como a la localización de las funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$. Un requerimiento que debe cumplir el operador (V.10) es la condición de similaridad, esto es, el tener el mismo objeto en la misma posición ($u_0(x_0) = v_0(x_0)$) debe maximizar el producto de correlación para cualquier valor de los órdenes fraccionarios. Para que esta condición se satisfaga, el término de fase cuadrático en la integral interior de la Ec. (V.10) debe ser nulo. Esta situación se cumple siempre que los órdenes fraccionarios satisfagan

$$\frac{1}{\tan \left(p \frac{\pi}{2} \right)} + \frac{1}{\tan \left(q \frac{\pi}{2} \right)} - \frac{1}{\tan \left(r \frac{\pi}{2} \right)} = 0, \quad (\text{V.12})$$

quedando el operador correlación fraccionaria expresado por

$$\begin{aligned} C^{p,q,r}(x) &= \exp \left(\frac{i\pi x^2}{\lambda f_1 \tan \phi_1} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x'_0) v_0^*(x''_0) \times \\ &\times \exp \left(\frac{i\pi x_0'^2}{\lambda f_1 \tan \phi_2} \right) \exp \left(-\frac{i\pi x_0''^2}{\lambda f_1 \tan \phi_3} \right) \times \\ &\times \delta \left(\frac{x}{\lambda f_1 \sin \phi_1} + \frac{x'_0}{\lambda f_1 \sin \phi_2} - \frac{x''_0}{\lambda f_1 \sin \phi_3} \right) dx'_0 dx''_0. \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

La correlación fraccionaria dada por la Ec. (V.13) está restringida a aquellos órdenes fraccionarios que satisfacen la Ec. (V.12). En el caso particular en el que $q = r$, los únicos valores posibles para el orden restante son $p = \pm 1$, y la Ec. (V.13) se convierte en la correlación fraccionaria definida por la Ec. (V.4). En este caso particular, la Ec. (V.13) se puede escribir como

$$\begin{aligned} C^{-1,q,q}(x) &= \exp \left[-\frac{i\pi \sin(2\phi) x^2}{2\lambda f_1} \right] \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'_0) v_0^*(x'_0 - x \sin \phi) \times \\ &\times \exp \left(\frac{2\pi i}{\lambda f_1} \cos \phi x x'_0 \right) dx'_0, \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

donde $\phi = q\pi/2$. Realizando el cambio de variables dado por

$$x'_0 = x' + \frac{\sin \phi}{2}x, \quad (\text{V.15})$$

la Ec. (V.14) puede expresarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} C^{-1,q,q}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \left(x' + \frac{\sin \phi}{2}x \right) v_0^* \left(x' - \frac{\sin \phi}{2}x \right) \exp \left(\frac{2\pi i}{\lambda f_1} \cos \phi x x' \right) dx' \\ &= A_{u_0 v_0} \left(y, \mu = -\frac{y}{\lambda f_1 \tan \phi} \right), \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

donde $y = x \sin \phi$ y $A_{u_0 v_0}(y, \mu)$ es la función ambigüedad cruzada, la cual es una representación espacio-fase de las funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$. Así, las correlaciones fraccionarias para valores de índice fraccionario, desde $q = 0$ (eje vertical, $y = 0$) hasta $q = 1$ (eje horizontal, $\mu = 0$), pueden ser obtenidas a partir de una única representación en el espacio-fase (y, μ) , mediante proyecciones de la función $A_{u_0 v_0}(y, \mu)$ sobre rectas que pasan por el origen de coordenadas. Este resultado fue derivado previamente en la Ref. [68] en el contexto de la analogía entre filtros espaciales ópticos basados en la FRFT, la transformada wavelet y redes neuronales.

En el caso más general en el que $q \neq r$, la correlación fraccionaria obtenida en la Ec. (V.13) puede ser escrita nuevamente como

$$C^{p,q,r}(x) = \exp \left(\frac{i\pi x^2}{\lambda f_1 \tan \phi_1} \right) \int_{-\infty}^{\infty} T_1(x'_0; z_1) \bar{T}_2^* \left(x'_0 + \frac{\sin \phi_2}{\sin \phi_1} x; z_2 \right) dx'_0, \quad (\text{V.17})$$

donde

$$T_1(x'_0; z_1) = u_0(x'_0) \exp \left(\frac{i\pi x'^2_0}{\lambda z_1} \right), \quad z_1 = f_1 \tan \phi_2, \quad (\text{V.18a})$$

$$\bar{T}_2(x'_0; z_2) = v_0 \left(\frac{x'_0}{M} \right) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda z_2} \left(\frac{x'_0}{M} \right)^2 \right], \quad z_2 = f_1 \tan \phi_3, \quad (\text{V.18b})$$

con

$$M = \frac{\sin \phi_2}{\sin \phi_3}. \quad (\text{V.19})$$

La correlación fraccionaria representada en la Ec. (V.17) puede interpretarse como la correlación convencional de dos funciones: $T_1(x'_0; z_1)$, que es la señal de entrada $u_0(x'_0)$ multiplicada por un factor de fase zonal de longitud focal z_1 , y $\bar{T}_2(x'_0; z_2)$, que

es el producto entre: la función $v_0(x'_0)$ y un factor de fase zonal de longitud focal z_2 , con un cambio M en la escala.

En la Figura V.6 se muestra un ejemplo que ilustra la selectividad posicional de la correlación fraccionaria. Las funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$ son dos rendijas idénticas ubicadas en diferentes posiciones como puede apreciarse en la Figura V.6(a). En las Figuras V.6(b), V.6(c), V.6(d) y V.6(e) puede apreciarse como difieren los factores de fase zonales de $T_1(x'_0; z_1)$ y $\bar{T}_2(x'_0; z_2)$, dependiendo tanto de la posición relativa de las rendijas como de la elección de los órdenes fraccionarios. Puede verse también que, para un desplazamiento constante, la elección de órdenes fraccionarios provoca una diferencia entre las fases de $T_1(x'_0; z_1)$ y $\bar{T}_2(x'_0; z_2)$ menor en las Figuras V.6(b) y V.6(d) que en las Figuras V.6(c) y V.6(e). En la Figura V.7 se muestran curvas calculadas numéricamente de la amplitud de la correlación fraccionaria entre las funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$ para dos desplazamientos relativos distintos Δ_1 y Δ_2 . Como puede verse de estos resultados, la amplitud del pico de correlación es menor para el desplazamiento mayor para ambas elecciones de los órdenes fraccionarios. Además, como es esperable, la disminución en la amplitud de la correlación es más abrupta para los órdenes fraccionarios más pequeños.

Como se ha visto, la correlación fraccionaria puede interpretarse como una correlación convencional entre dos funciones $T_1(x)$ y $\bar{T}_2(x)$ relacionadas con las funciones originales a través de una modificación de la fase y la escala dada por las Ecs. (V.18). Este hecho, posibilita la aplicación de este formalismo al desarrollo de un filtro para reconocimiento de patrones que sea sensible a la forma y posición del objeto y que pueda ajustarse en forma versátil para adaptarse a variaciones en la escala. Para dos funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$ ubicadas en la misma posición y que solo difieren en un determinado factor de escala, existen varios conjuntos de valores (p_0, q_0, r_0) para los cuales la correlación fraccionaria $C^{p,q,r}(x)$ es la correlación convencional de dos funciones que tienen idéntica distribución de amplitud y que difieren levemente en la fase. En la Figura V.8(a) se muestra los conjuntos particulares de valores (p_0, q_0, r_0) para tres diferentes magnificaciones relativas de las funciones a correlacionar $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$.

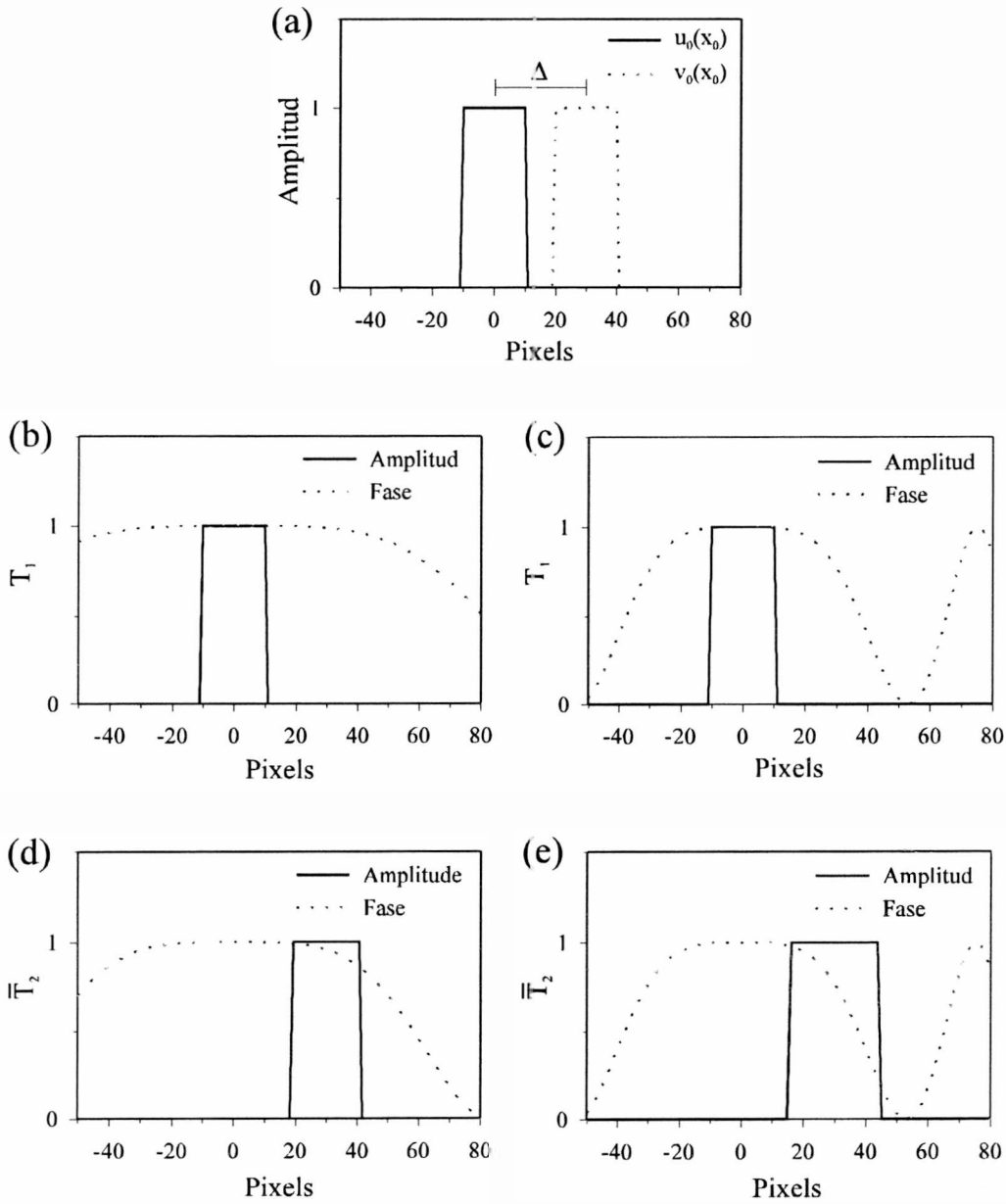


Figura V.6: (a) Amplitud de las funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$. (b) y (d) Amplitud y fase de $T_1(x'_0; z_1)$ y $\bar{T}_2(x'_0; z_2)$, respectivamente para $q = 0.8$ y $r = 0.7$. (c) y (e) Amplitud y fase de $T_1(x'_0; z_1)$ y $\bar{T}_2(x'_0; z_2)$, respectivamente para $q = 0.6$ y $r = 0.4$.

Con el objeto de analizar el comportamiento de la correlación fraccionaria se define un parámetro de correlación

$$\alpha^{p,q,r} = \left[\frac{\int |C_{u_0 v_0}^{p,q,r}(x) - C_{u_0 u_0}^{-1,1,1}(x)| dx}{\int |C_{u_0 u_0}^{-1,1,1}(x)| dx} \right]^{-1}, \quad (\text{V.20})$$

que mide la desviación relativa de la correlación fraccionaria, entre dos funciones de igual forma pero de diferente magnificación, de la autocorrelación convencional de una de esas funciones para un determinado valor de la magnificación M dada por la Ec. (V.19).

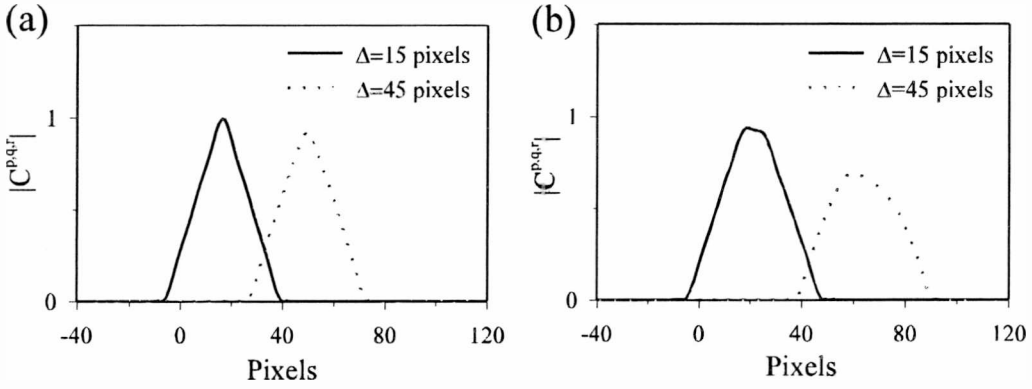


Figura V.7: Amplitud normalizada de la correlación fraccionaria de órdenes: (a) $q = 0.8$, $r = 0.7$ y $p = 0.884$ y (b) $q = 0.6$, $r = 0.4$ y $p = 0.633$, entre las funciones $u_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$ para dos diferentes desplazamientos relativos Δ

En las Figuras V.8(b) y V.8(c) se muestran los valores del cálculo numérico del parámetro $\alpha^{p,q,r}$, utilizando las Ecs. (V.13) y (V.20), para dos rendijas que tienen una magnificación relativa $M = 1.35$. Como puede observarse en la figura, los máximos valores del parámetro $\alpha^{p,q,r}$ se encuentran a lo largo de una curva en el dominio de los órdenes fraccionarios q y r . Dicha curva coincide con la graficada en la Figura V.8(a) para el valor $M = 1.35$. Sin embargo, puede verse que los valores de $\alpha^{p,q,r}$ no mantienen un valor constante a lo largo de la curva mencionada. Este hecho está relacionado con la variación de la pequeña diferencia de fase entre las funciones $T_1(x)$ y $\bar{T}_2(x)$, mencionada anteriormente, en función de los órdenes q y r .

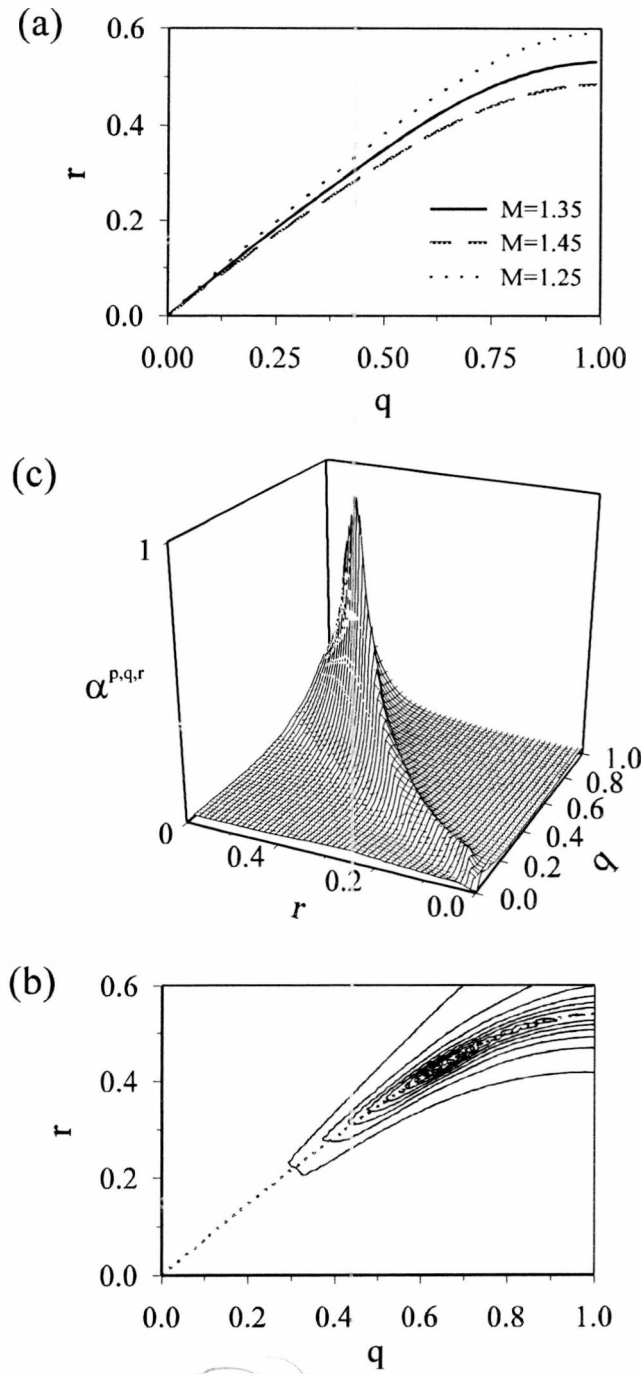


Figura V.8: (a) Curvas que muestran los diferentes conjuntos de valores (q_0, r_0) que verifican la Ec.(V.18) para tres valores diferentes de M . (b) Gráfico tridimensional del parámetro $\alpha^{p,q,r}$ para la correlación de dos rendijas que tienen una magnificación relativa $M = 1.35$. (c) Curvas de nivel del gráfico (b); la curva punteada representa la curva de (a) correspondiente a $M = 1.35$.

Como consecuencia del análisis desarrollado, puede concluirse que un arreglo óptico capaz de realizar la correlación fraccionaria definida en esta sección, puede utilizarse para detectar objetos con magnificaciones diferentes a la almacenada en el filtro. En la Figura V.9 se muestra el esquema del arreglo experimental utilizado para realizar las operaciones de correlación fraccionaria. En el filtro holográfico H se almacena el patrón de interferencia producido por el haz de referencia y la FRFT de orden r de la transparencia $v_0(x_0, y_0)$, la que es generada en el plano del filtro por el sistema óptico A . Este sistema, propuesto por Lohmann en la Ref. [22], permite realizar la FRFT de una transparencia, para órdenes fraccionarios entre -1 y 1 , variando solo las distancias d_1 y d_2 , es decir sin necesidad de modificar las distancias focales de las lentes a fin de mantener el parámetro de escala λf_1 constante. Las

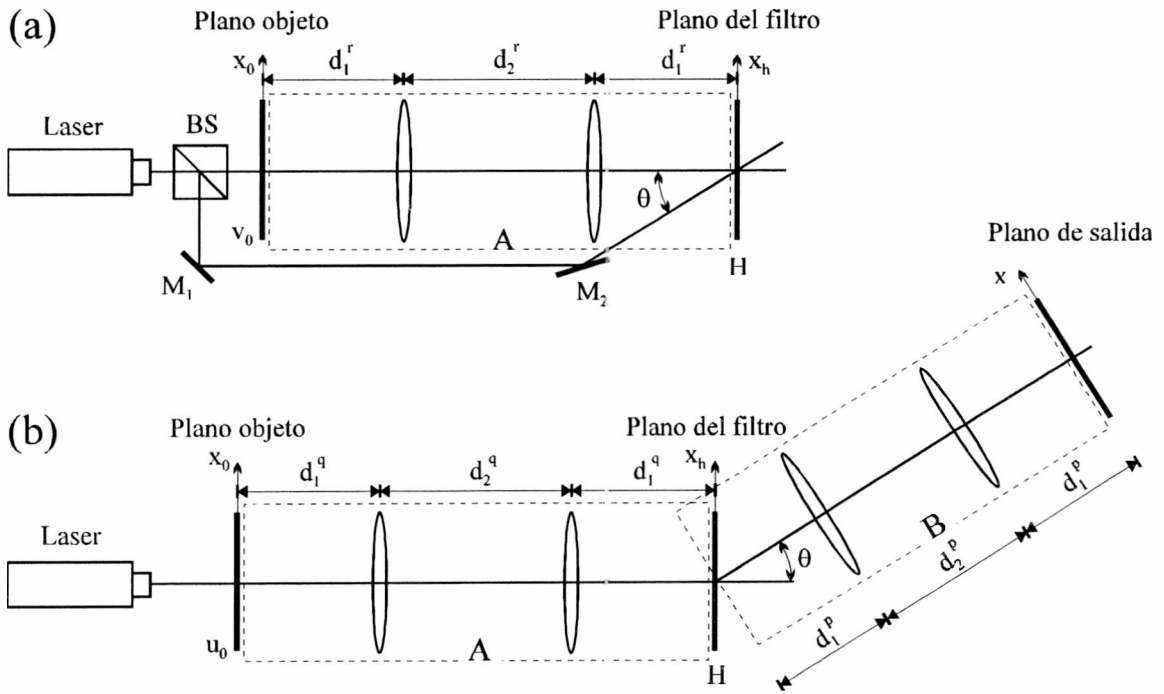


Figura V.9: Esquema del dispositivo experimental utilizado para obtener (a) el registro holográfico en el filtro H , que almacena la FRFT de orden r de la función $v_0(x_0, y_0)$ y (b) la correlación fraccionaria $C^{p,q,r}(x)$ en el plano de salida. M: espejos; BS: divisor de haz.

distancias adecuadas para registrar la FRFT de orden r en este sistema son

$$d_1^r = f \tan(r\pi/4) + f \quad (\text{V.21a})$$

$$d_2^r = f \tan(r\pi/2) + 2f \quad (\text{V.21b})$$

Una vez concluida la etapa de registro del filtro, el sistema completo $A - B$ es utilizado de manera similar a una configuración $4f$. En la primera parte, el subsistema A realiza la FRFT de orden q de la transparencia $u_0(x_0, y_0)$ en el plano del filtro holográfico H . Las distancias características de este subsistema están dadas por las Ecs. (V.21) pero adecuadas al orden fraccionario q . En la segunda parte, mediante el subsistema B , se obtiene la FRFT de orden p de la amplitud transmitida por el filtro H en el plano de salida del correlador. Para este último subsistema las distancias características son también las expresadas en las Ecs. (V.21) para el orden p . Con este arreglo óptico puede obtenerse la correlación óptica fraccionaria $C^{p,q,r}(x, y)$ para varios órdenes fraccionarios modificando solo las distancias d_1^q, d_2^q, d_1^p y d_2^p . Así, la correlación puede ser adaptada fácilmente, a una dada magnificación del objeto a reconocer, por simple variación de los órdenes r y q con el objeto de seleccionar el valor de M requerido.

Como fuente de iluminación fue utilizado un haz de laser de He-Ne colimado y expandido, de longitud de onda $\lambda = 632.8$ nm y 15 mW de potencia. En la etapa de registro del filtro holográfico, fueron utilizados dos haces coherentes con un ángulo entre ellos de $\theta \cong 40^\circ$ producidos por el divisor de haz BS . Uno de ellos fue utilizado como haz de referencia mientras que el otro fue usado para iluminar la transparencia $v_0(x_0, y_0)$. Como medio de registro fueron utilizadas placas holográficas Agfa 10E75 de elevada sensibilidad, unos 90 nm de grosor del grano, y con una resolución máxima de 3000 líneas/mm. Para sintetizar el filtro fue utilizada la FRFT de orden $r = 0.600$ de una diapositiva binaria con un carácter "A" de 1.5 mm de alto y 1 mm de ancho. Durante la etapa de obtención de la correlación fraccionaria el haz de referencia fue removido y las imágenes del plano de salida fueron adquiridas mediante una cámara CCD, digitalizadas con una placa de video y almacenadas en una computadora con una resolución en intensidad de 256 niveles de gris. En los subsistemas A y B fueron utilizadas lentes de distancia focal $f = 100$ mm. En la Tabla V.1 se indican los valores

de las distancias empleadas en los subsistemas, los órdenes fraccionarios obtenidos y las magnificaciones correspondientes.

$M = 0.8$			
	$p = -0.730$	$q = 0.448$	$r = 0.600$
d_1 (mm)	35.4	136.7	150.9
d_2 (mm)	108.8	264.7	280.9

$M = 1.0$			
	$p = 1.000$	$q = 0.600$	$r = 0.600$
d_1 (mm)	200	150.9	150.9
d_2 (mm)	300	280.9	280.9

$M = 1.2$			
	$p = 0.715$	$q = 0.846$	$r = 0.600$
d_1 (mm)	162.9	178.3	150.9
d_2 (mm)	290.2	297.1	280.9

Tabla V.1: Valores de las distancias empleadas en los subsistemas A y B del arreglo experimental de la Figura V.9 para los tres conjuntos de órdenes utilizados

En las Figuras V.10, V.11 y V.12, se muestran las correlaciones fraccionarias entre dos caracteres "A", con una magnificación relativa determinada, para tres conjuntos de órdenes (p, q, r) . En cada una de estas figuras se obtiene un máximo de intensidad del pico de correlación fraccionaria cuando la magnificación relativa entre los caracteres satisface la Ec. (V.19).

En un segundo experimento, el dispositivo óptico A, ilustrado en la Figura V.9(a), es ligeramente modificado a fin de realizar un registro holográfico múltiple en el filtro H . El objetivo es almacenar varias FRFT de la misma transparencia de referencia con diferentes órdenes fraccionarios r . Para ello, cada registro es realizado con una pequeña variación del ángulo de incidencia θ del haz de referencia. De esta forma, el correlador óptico de la Figura V.9(b) se comporta de la siguiente manera: Como las distancias d_1^q y d_2^q permanecen fijas, para cada valor de r asociado a un ángulo de registro en el filtro le corresponde un valor de magnificación M dado por la Ec. (V.19). Así, con solo seleccionar las distancias d_1^p y d_2^p para que el conjunto de órdenes (p, q, r) verifique la Ec. (V.12), el correlador puede ajustarse para reconocer solo una

de todas las magnificaciones disponibles en el filtro. En otras palabras, aparece un pico agudo en la intensidad de la correlación, en una localización asociada al ángulo θ para el cual el orden r y el orden fijo q satisfacen la Ec. (V.19). Funcionando de esta manera, el correlador reconoce objetos con diferencia de escala dada por M si la señal en el plano de salida tiene la posición correspondiente al ángulo θ (o coordenada espacial x en el plano de salida) asociado.

Fue realizado un registro múltiple de la FRFT de una transparencia de referencia para tres valores diferentes del orden fraccionario: $r = 0.840$, $r = 0.783$, y $r = 0.734$. El valor del orden fraccionario q fue elegido de manera que las magnificaciones asociadas a cada ángulo de registro fueran $M = 1.10$, $M = 1.15$, y $M = 1.20$. En la Figura V.13(a) se muestra la acción del correlador cuando el objeto de entrada difiere en una magnificación de $M = 1.10$ con el objeto de referencia. Puede apreciarse que el pico en la intensidad de la correlación aparece en la localización asociada al ángulo correspondiente al registro de la FRFT de orden $r = 0.840$. En las Figuras V.13(b) y V.13(c) se observan las señales de salida del correlador cuando los objetos de entrada difieren en una magnificación $M = 1.15$ y $M = 1.20$ respectivamente. En dichos casos los picos de intensidad de la correlación aparecen para localizaciones asociadas a los valores de $r = 0.783$ y $r = 0.734$ respectivamente. Así, la señal de correlación aparece en diferentes posiciones del plano de salida de acuerdo a que magnificación del objeto $v_0(x_0, y_0)$ esté presente en el plano de entrada.

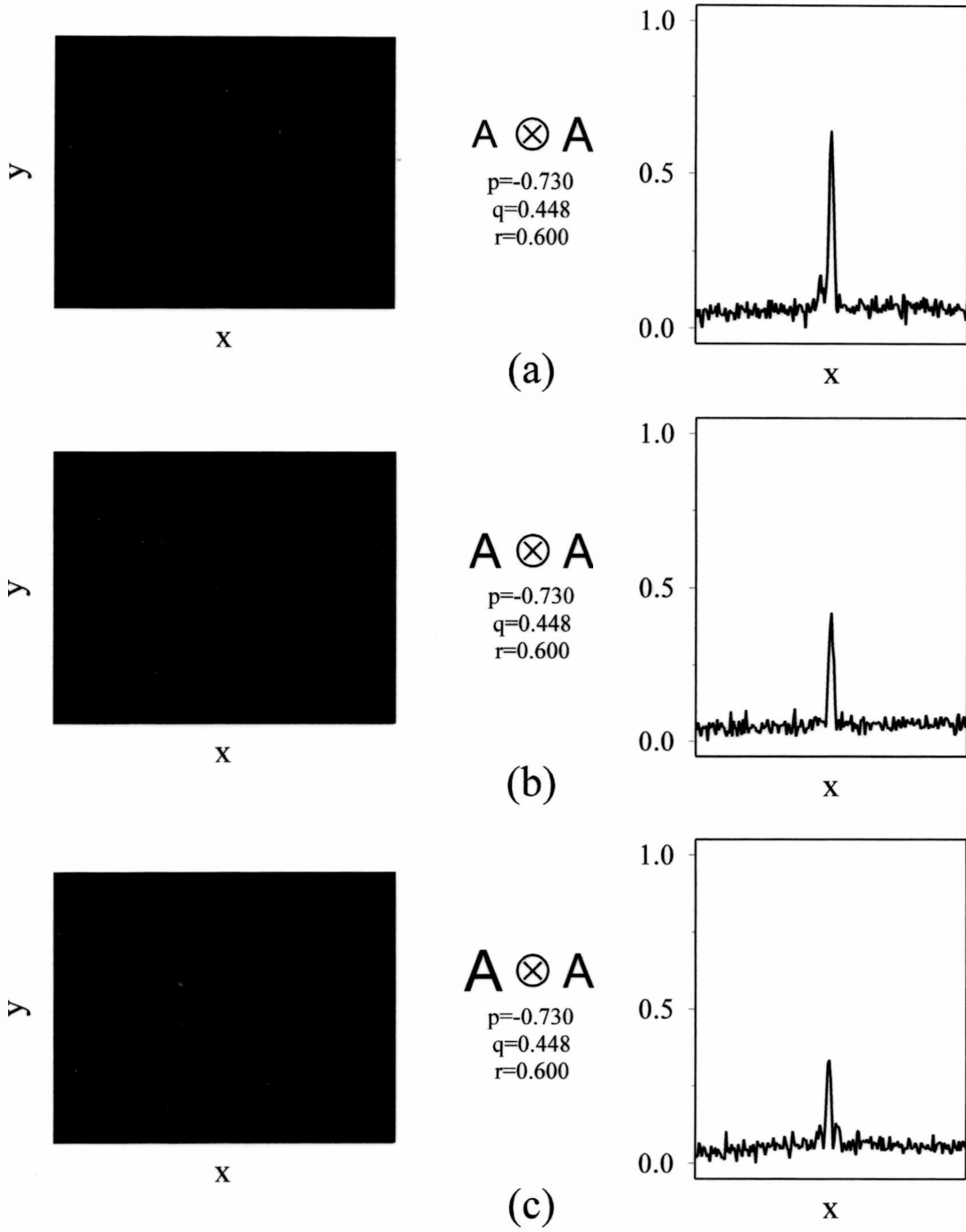


Figura V.10: Intensidad de la correlacion fraccionaria entre dos caracteres "A" que difieren en su magnificación relativa M : (a) $M = 0.80$, (b) $M = 1.00$, y (c) $M = 1.20$. Los órdenes fraccionarios elegidos, $p = -0.730$, $q = 0.448$ y $r = 0.600$, permiten al correlador reconocer magnificaciones con $M = 0.80$.

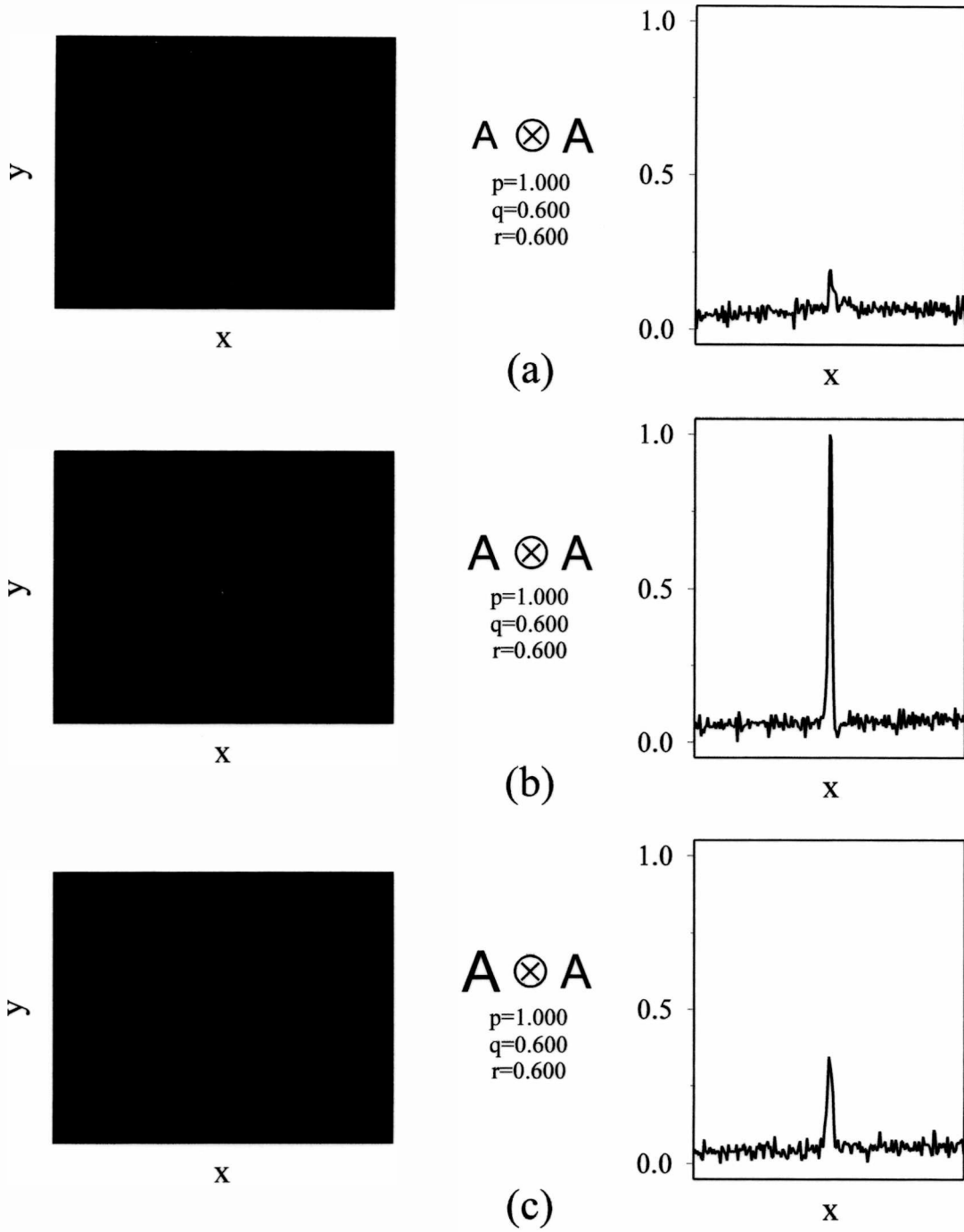


Figura V.11: Intensidad de la correlacion fraccionaria entre dos caracteres "A" que difieren en su magnificación relativa M : (a) $M = 0.80$, (b) $M = 1.00$, y (c) $M = 1.20$. Los órdenes fraccionarios elegidos, $p = 1.000$, $q = 0.600$ y $r = 0.600$, permiten al correlador reconocer magnificaciones con $M = 1.00$.

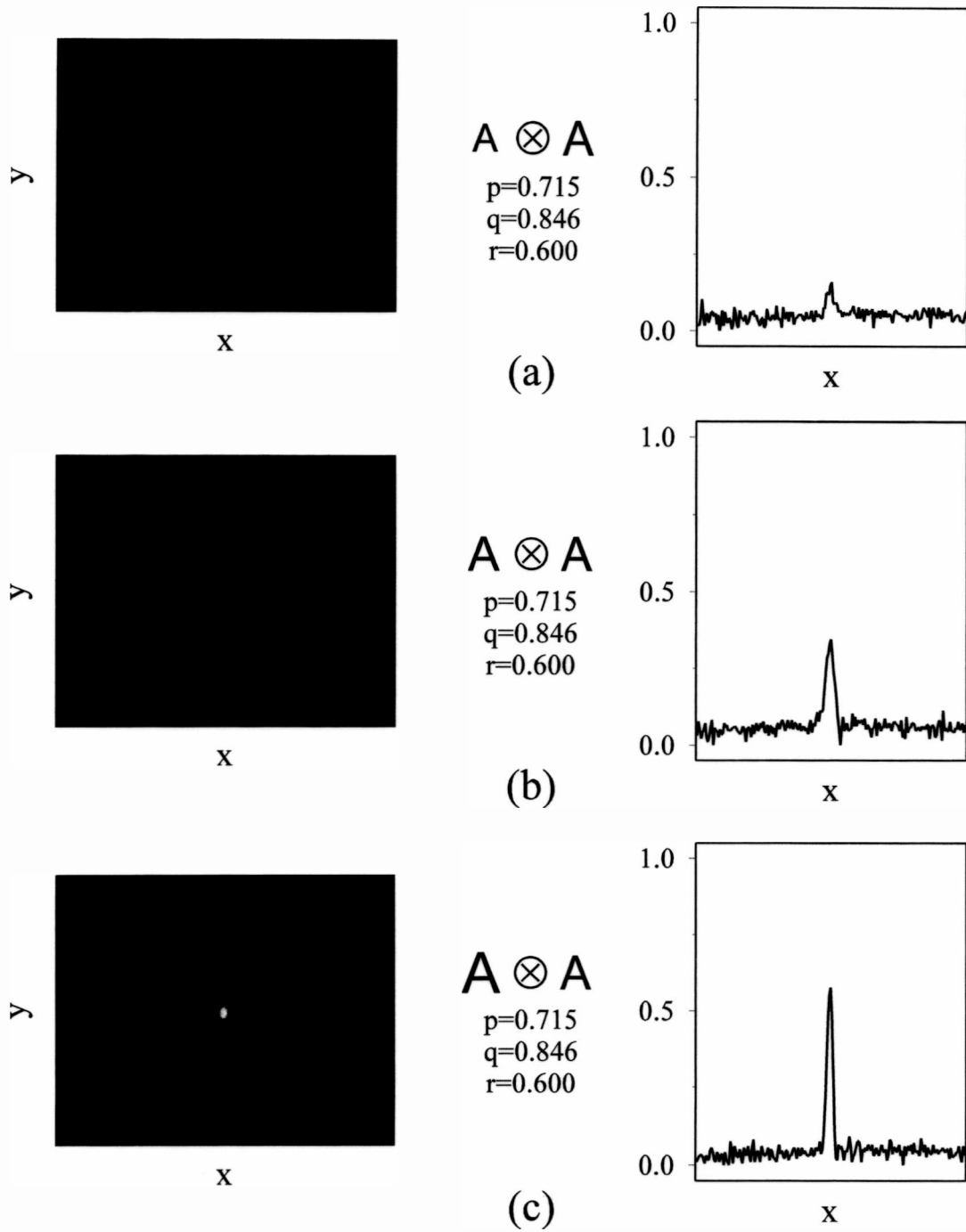


Figura V.12: Intensidad de la correlacion fraccionaria entre dos caracteres "A" que difieren en su magnificación relativa M : (a) $M = 0.80$, (b) $M = 1.00$, y (c) $M = 1.20$. Los órdenes fraccionarios elegidos, $p = 0.715$, $q = 0.846$ y $r = 0.600$, permiten al correlador reconocer magnificaciones con $M = 1.20$.

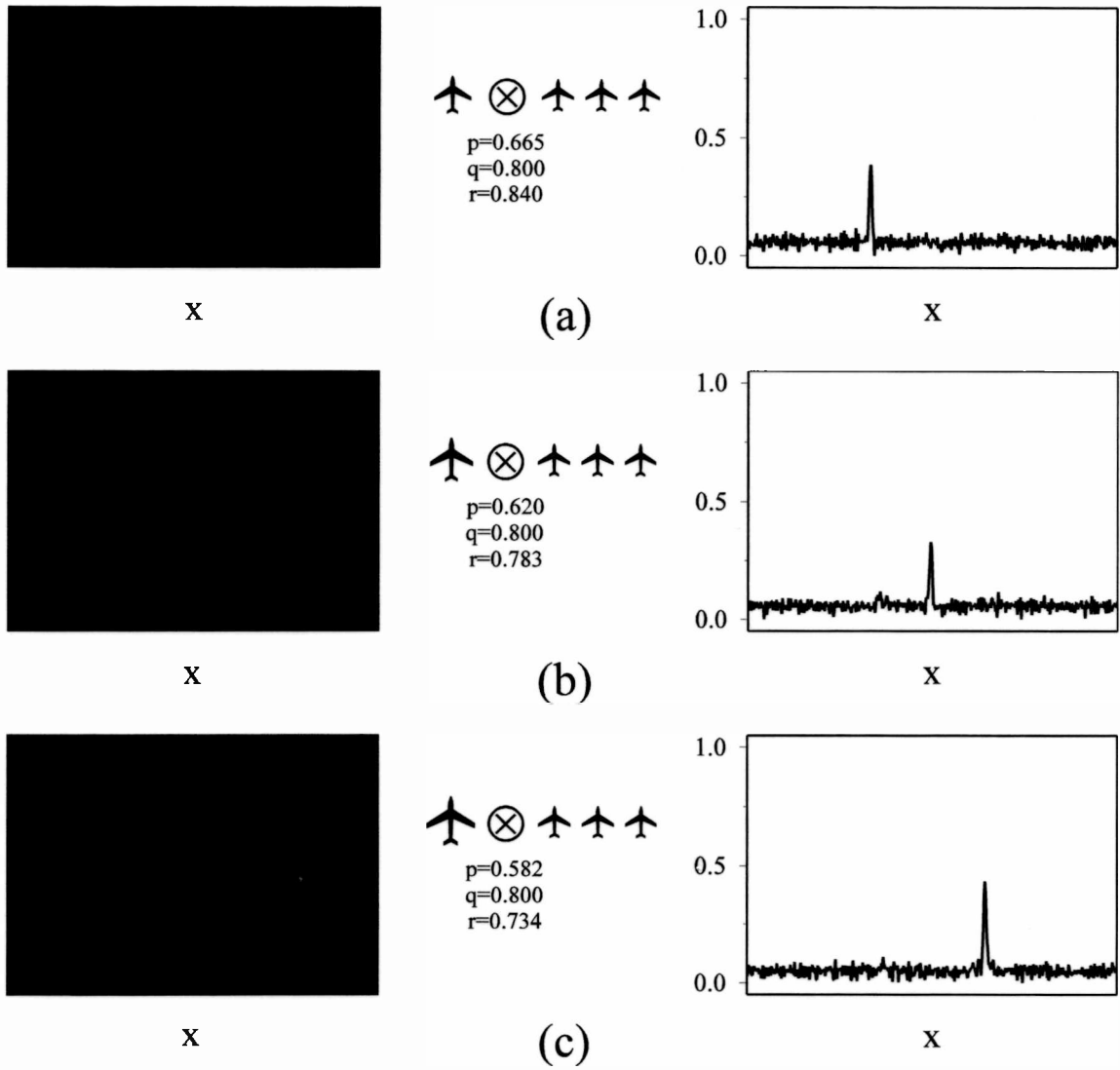


Figura V.13: Distribuciones de intensidad obtenidas en el plano de salida del correlador fraccionario, ilustrado en la Figura V.9, para un registro holográfico múltiple H que consiste en tres FRFT de una transparencia v_0 con perfil de avión para órdenes $r = 0.840$, $r = 0.783$, y $r = 0.734$. Dependiendo de la magnificación M del objeto de entrada u_0 , el máximo pico de correlación aparece en la localización correspondiente a la magnificación: (a) $M = 1.10$, (b) $M = 1.15$, (c) $M = 1.20$

Capítulo VI

Conclusiones

El formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria fue introducido recientemente en la óptica mediante dos definiciones basadas en conceptos diferentes. En la primera de ellas, debida a Mendlovic y Ozaktas, está definida a partir de la propagación de la luz en un medio de índice de refracción variable parabólico. En ésta definición las diferentes FRFT de una transparencia están asociadas al campo propagado a lo largo de una distancia que corresponde a una fracción de la necesaria para obtener la transformada de Fourier ordinaria. La segunda definición se debe a Lohmann y se basa en la rotación, en el espacio-fase, de la función de distribución de Wigner de la señal. De esta forma, para una dada FRFT, el ángulo de rotación será una fracción del necesario para obtener la transformada de Fourier clásica, que es $\pi/2$. En el Capítulo II, se realizó una presentación de estas dos definiciones y se estudiaron sus propiedades, y su compatibilidad. Algunos de los teoremas más importantes relacionados con la FRFT se demostraron en los apéndices.

Así como la transformada de Fourier clásica está directamente relacionada con los patrones de difracción de campo lejano, su generalización, la FRFT, lo está con los patrones de difracción de Fresnel. De esta forma, la propagación del campo luminoso en un proceso de difracción está vinculado al incremento del orden fraccionario en la FRFT de la transparencia difractante. En el Capítulo III se encontraron las condiciones bajo las cuales es posible asociar a la FRFT de una función un patrón de difracción de Fresnel correspondiente a una versión magnificada de ésta. A partir del estudio realizado fueron propuestos dos arreglos ópticos que permiten generar la

FRFT de una señal mediante la propagación de una onda esférica convergente. Como una aplicación de la relación entre los patrones de difracción de Fresnel y la FRFT, se estudió y comprobó la aparición de periodicidades en ésta, para ciertos órdenes p , cuando las señales de entrada son funciones periódicas (redes de Ronchi). Esta particularidad es una manifestación, en el formalismo de la FRFT, del fenómeno de autoimágenes bajo iluminación coherente. Finalmente se hizo una breve reseña del trabajo desarrollado en la implementación de algoritmos y programas de computación con el objeto de realizar el cálculo numérico de la FRFT. Para ello se utilizaron las definiciones de la transformación dadas en el Capítulo II lo que dió origen a dos formas de calcularla.

El Capítulo IV se dedicó al estudio de representaciones vinculadas a la FRFT y de la relación que existe entre éstas y la transformación de Radon-Wigner. En este contexto, se diseñó y construyó un procesador óptico que permite obtener la representación de Radon-Wigner de una transparencia de entrada asociada a una función unidimensional. En este arreglo experimental los órdenes fraccionarios de las FRFT no están limitados a tomar valores discretos como en la Ref. [48]. El diseño está basado en que la iluminación de una transparencia, mediante una onda esférica convergente, genera, por propagación del campo en el espacio libre, todas las FRFT de esta señal con órdenes fraccionarios entre cero y uno a lo largo del eje óptico del sistema. Los componentes ópticos utilizados para contruir el dispositivo, como lentes cilíndricas y varifocales, son elementos refractivos convencionales. Se presentaron demostraciones experimentales de la obtención de la representación de Radon-Wigner para varias pupilas, incluyendo una experiencia de detección de una señal chirp. En todos los casos se encontró un gran acuerdo entre los datos experimentales y las simulaciones numéricas realizadas, lo que confirma el buen funcionamiento del dispositivo propuesto. Como una aplicación posible, este arreglo óptico podría utilizarse para describir la evolución de la amplitud de campos complejos en propagación en el espacio libre o en un medio GRIN parabólico. Un ejemplo de este tipo de aplicación sería el análisis del proceso de difracción mediante pupilas con comportamiento fractal [70, 71]. La obtención óptica de la representación de Radon-Wigner podría también usarse en la implementación de un correlador fraccionario multicanal en paralelo.

Este dispositivo sería capaz de realizar, en forma simultánea, todas las correlaciones fraccionarias entre dos funciones unidimensionales para un continuo de órdenes fraccionarios entre cero y uno.

Se aplicó el formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria al análisis de algunos parámetros de calidad en sistemas ópticos formadores de imagen. Este enfoque puede considerarse como una generalización de aquellos basados en otras representaciones de señales en el espacio de las fases como la WDF y la función ambigüedad. Se determinó que la información sobre la calidad de la imagen se encuentra almacenada en el módulo cuadrado de la FRFT, o transformación de Radon-Wigner, de la transmitancia unidimensional asociada a la pupila del sistema óptico. En ciertas ocasiones, esta transmitancia unidimensional puede ser considerada como equivalente a una apertura bidimensional con alguna simetría [69, 20]. Se asoció la proyección de la representación de Radon-Wigner sobre el eje de los órdenes fraccionarios p , a los diferentes valores de la razón de Strehl en función de la distancia de desenfoque. Además, se encontró la relación que existe entre la transformada de Fourier de la representación de Radon-Wigner, a lo largo del eje de las coordenadas, y la función de transferencia óptica (OTF) asociada a la pupila del sistema. De esta forma, de una única representación de Radon-Wigner, se obtuvieron diferentes OTF para varios valores del coeficiente de desenfoque. Como aplicaciones sencillas de este formalismo se realizaron comparaciones, experimentales y mediante simulaciones numéricas, de la razón de Strehl y la OTF para pupilas unidimensionales con diferentes obscuraciones centrales. Finalmente, se analizó el comportamiento ante desenfoques de la razón de Strehl en pupilas apodizadas asimétricamente.

En el Capítulo V se estudió la generalización fraccionaria de la correlación óptica. Uno de los resultados de esta tesis es la implementación de un correlador a tiempo real que permite detectar variaciones en la localización y forma de los objetos almacenados en el filtro. Utilizando este dispositivo se realizaron estudios a fin de determinar como varía la sensibilidad de detección, a cambios en la posición del objeto, con diferentes órdenes fraccionarios y con distintos espesores del medio de almacenamiento utilizado como filtro. Este análisis permitió separar el efecto de la ruptura de la invariancia translacional debida a la naturaleza fraccionaria de la

correlación, que era el objeto de estudio, de la producida por el error de Bragg en la lectura del registro de volumen en el filtro. El correlador propuesto, basado en el formalismo de la FRFT, tiene la ventaja respecto de otros correladores, basados en técnicas tales como los registros en volumen y la codificación en fase del haz de referencia, de que la sensibilidad para detectar desplazamientos en los objetos puede ajustarse por simple variación de las posiciones relativas entre el objeto, la lente y el filtro holográfico en el sistema óptico. La modificación de tales distancias es realizada a fin de cambiar el orden fraccionario p de la correlación fraccionaria obtenida en el plano de salida del correlador. Los cristales fotorefractivos, como el utilizado en el filtro holográfico, poseen una alta capacidad de almacenamiento. Esta propiedad permitiría realizar un registro múltiple, utilizando el método de multiplexado angular, de diversas FRFT de una misma transparencia con diferentes órdenes fraccionarios. De esta forma, variando el ángulo de lectura y las distancias filtro-lente y lente-transparencia podría cambiarse fácilmente el orden fraccionario de la correlación, y por consiguiente, modificar la sensibilidad del dispositivo sin necesidad de regrabar el filtro.

Se realizó una generalización de la definición de correlación fraccionaria dada en las Refs. [11, 60, 61]. En este nuevo producto de correlación pueden ser variados los tres órdenes fraccionarios de las FRFT involucradas en la definición. Utilizando esta generalización se interpretó a la correlación fraccionaria de dos señales como la correlación clásica de las señales originales pero con diferente magnificación y la fase ligeramente modificada. Esta nueva transformación permitió la implementación de un correlador óptico fraccionario sensible a las translaciones y con la capacidad para reconocer versiones magnificadas del objeto almacenado en el filtro holográfico. El método de ajuste de la magnificación a reconocer resultó ser muy flexible puesto que puede variarse cambiando parámetros geométricos del arreglo óptico sin necesidad de modificar el registro holográfico. A fin de diseñar un detector de magnificaciones, se realizó un registro múltiple de tres FRFT de un objeto, con ordenes fraccionarios distintos, multiplexadas angularmente. Así, variando algunas distancias entre componentes ópticos del arreglo experimental, es posible reconocer la magnificación de un objeto entre las que están codificadas en el filtro holográfico.

Como conclusión final puede decirse que la tarea desarrollada en esta tesis constituye un estudio novedoso del formalismo de la transformada de Fourier fraccionaria y de sus propiedades. Se analizaron diversos aspectos vinculados a la interpretación óptica de la transformada de Fourier fraccionaria y de algunas operaciones derivadas de ésta. Utilizando este nuevo formalismo se desarrollaron aplicaciones novedosas al procesamiento óptico de la información, las que fueron implementadas experimentalmente. En todos los casos se realizaron comparaciones entre la teoría, simulaciones computacionales y datos experimentales, hallándose una gran concordancia entre ellos. El estudio teórico y las aplicaciones realizadas en este trabajo de tesis no agota el tratamiento de este formalismo que, debido a su reciente introducción en el campo de la óptica, está en estado de continuo desarrollo.

Apéndice A

Definición matemática de la FRFT

En el Capítulo II se describen dos definiciones de la transformada de Fourier fraccionaria. Si bien los orígenes de estas definiciones son diferentes, tienen en común que ambas son definiciones físicas de la transformación. Siguiendo a [6, 7], definiremos a la FRFT en forma más abstracta.

La transformada de Fourier y su inversa pueden escribirse en forma de operador como

$$\mathcal{F}^{\pi/2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp(ixx') dx', \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathcal{F}^{-\pi/2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp(-ixx') dx'. \quad (\text{A.1b})$$

Los operadores $\mathcal{F}^{\pi/2}$ y $\mathcal{F}^{-\pi/2}$ son conjugados y satisfacen la relación $\mathcal{F}^{\pi/2} \mathcal{F}^{-\pi/2} = \mathcal{F}^{-\pi/2} \mathcal{F}^{\pi/2} = 1$. Las autofunciones del operador transformada de Fourier son las funciones $\exp(-x^2/2) H_n(x)$, donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite de orden n . La ecuación de autovalores es:

$$\mathcal{F}^{\pi/2} \exp(-x^2/2) H_n(x) = e^{in\pi/2} \exp(-x^2/2) H_n(x). \quad (\text{A.2})$$

Puede definirse la transformada de Fourier fraccionaria de orden ϕ mediante el operador \mathcal{F}^ϕ que satisface la ecuación:

$$\mathcal{F}^\phi \exp(-x^2/2) H_n(x) = e^{in\phi} \exp(-x^2/2) H_n(x). \quad (\text{A.3})$$

Con es objeto de hallar una representación integral para el operador \mathcal{F}^ϕ , expandimos

$f(x)$	$\mathcal{F}^\phi f(x)$
$\delta(x)$	$\frac{e^{i(\pi\hat{\phi}/4-\phi/2)}}{\sqrt{i\pi \sin\phi }} \exp\left(-\frac{ix^2}{2\tan\phi}\right)$
1	$\frac{e^{-i\phi/2}}{\sqrt{\cos\phi}} \exp\left(\frac{ix^2}{2}\tan\phi\right)$
e^{ikx}	$\frac{e^{-i\phi/2}}{\sqrt{\cos\phi}} \exp\left[\frac{i}{2}\tan\phi(k^2+x^2) + \frac{ikx}{\cos\phi}\right]$
$H_n(x) \exp(-x^2/2)$	$e^{i\pi\hat{\phi}} H_n(x) \exp(-x^2/2)$
$\exp(-x^2/2)$	$\exp(-x^2/2)$

Tabla A.1: Transformada de Fourier fraccionaria de algunas funciones elementales.

a una función $f(x)$, de cuadrado integrable, en términos de las funciones de Hermite-Gauss,

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n \exp(-x^2/2) H_n(x), \quad (\text{A.4})$$

donde los coeficientes de la expansión están dados por:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \exp(-x^2/2) f(x) dx. \quad (\text{A.5})$$

Utilizando la Ec.(A.3), el efecto del operador transformada de Fourier fraccionaria sobre $f(x)$ es:

$$\mathcal{F}^\phi f(x) = \sum_0^\infty a_n e^{i\pi\hat{\phi}} \exp(-x^2/2) H_n(x). \quad (\text{A.6})$$

Insertando la Ec.(A.5) en la Ec.(A.6) y haciendo uso de la fórmula de Mehler que puede escribirse como [25]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\pi\hat{\phi}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{2i\phi}}} \exp \left[\frac{2x\tilde{x}e^{i\phi} - e^{2i\phi}(x^2 + \tilde{x}^2)}{1 - e^{2i\phi}} \right],$$

se obtiene

$$\mathcal{F}^\phi f(x) = \frac{e^{i(\pi\hat{\phi}/4-\phi/2)}}{\sqrt{2\pi|\sin\phi|}} \exp\left(-\frac{ix^2}{2\tan\phi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \exp\left(-\frac{i\tilde{x}^2}{2\tan\phi} + \frac{ix\tilde{x}}{\sin\phi}\right) d\tilde{x},$$

valida para $0 < |\phi| < \pi$ y donde $\hat{\phi} = \text{sg}(\sin\phi)$. La aplicación de este operador en algunas funciones sencillas puede observarse en la Tabla A.1.

Apéndice B

Algunos teoremas sobre la FRFT

En este apéndice se demostrarán los teoremas que fueron enunciados en el Capítulo II. Estos son: el teorema de Parseval, el teorema de escala, el teorema de translación y el teorema de la derivada. En este apéndice todas las variables de integración tendrán como límites $-\infty$ y ∞ aunque no aparezcan en forma explícita en las integrales.

B.1 Generalización del Teorema de Parseval

El teorema de Parseval enunciado para la transformada de Fourier fraccionaria puede expresarse como:

$$\int u(x)v^*(x)dx = \int u_p(y)v_p^*(y)dy, \quad (\text{B.1})$$

donde

$$u_p(y) = \int u(x) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan \phi} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[\left(\frac{-2\pi i}{\lambda f_1 \sin \phi} \right) xy \right] dx, \quad (\text{B.2})$$

$$v_p(y) = \int v(x) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan \phi} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[\left(\frac{-2\pi i}{\lambda f_1 \sin \phi} \right) xy \right] dx, \quad (\text{B.3})$$

con $\phi = p\pi/2$. Realizando la conjugación compleja de la Ec.(B.3) y reemplazandola en el segundo miembro de la Ec.(B.1), obtenemos

$$\int u_p(y)v_p^*(y)dy = \int u_p(y) \int v^*(x) \exp \left[\frac{-i\pi}{\lambda f_1 \tan \phi} (x^2 + y^2) \right] \times$$

$$\times \exp \left[\left(\frac{2\pi i}{\lambda f_1 \operatorname{sen} \phi} \right) xy \right] dx dy. \quad (\text{B.4})$$

Escribiéndola en forma conveniente y utilizando las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(-\phi) = -\operatorname{sen} \phi, \quad (\text{B.5a})$$

$$\tan(-\phi) = -\tan \phi, \quad (\text{B.5b})$$

obtenemos

$$\int v^*(x) \int u_p(y) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda f_1 \tan(-\phi)} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[\left(\frac{-2\pi i}{\lambda f_1 \operatorname{sen}(-\phi)} \right) xy \right] dy dx. \quad (\text{B.6})$$

La integral en y no es mas que la transformada de Fourier fraccionaria inversa de $u_p(y)$ dada por la Ec.(II.51), que es $u(x)$, con lo cual

$$\int u(x) v^*(x) dx. \quad (\text{B.7})$$

B.2 Teorema de translación

Se analizará como se comporta la FRFT cuando producimos las siguiente transformación de la señal de entrada:

$$u(x) \longrightarrow u(x + \alpha). \quad (\text{B.8})$$

La FRFT de la señal modificada la podemos expresar como

$$u_p^\alpha(y) = \int u(x + \alpha) \exp \left[i\pi \frac{(x^2 + y^2)}{T} \right] \exp \left[-2\pi i \frac{xy}{S} \right] dx, \quad (\text{B.9})$$

donde $T = \lambda f_1 \tan \phi$, $S = \lambda f_1 \operatorname{sen} \phi$ y $\phi = p\pi/2$. Realizando el siguiente cambio de variables

$$\bar{x} = x + \alpha, \quad (\text{B.10a})$$

$$\bar{y} = y + \alpha \cos \phi, \quad (\text{B.10b})$$

la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} u_p^\alpha(\bar{y} - \alpha \cos \phi) &= \int u(\bar{x}) \exp \left[i\pi \frac{(\bar{x} - \alpha)^2 + (\bar{y} - \alpha \cos \phi)^2}{T} \right] \times \\ &\times \exp \left[-2\pi i \frac{(\bar{x} - \alpha)(\bar{y} - \alpha \cos \phi)}{S} \right] d\bar{x}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Desarrollando los argumentos de las exponenciales y reagrupando convenientemente los términos obtenemos

$$u_p^\alpha(\bar{y} - \alpha \cos \phi) = \exp \left[i\pi \left(\frac{\alpha^2 - 2\bar{y}\alpha \cos \phi + \alpha^2 \cos^2 \phi}{T} + \frac{2\alpha\bar{y} - 2\alpha^2 \cos \phi}{S} \right) \right] \times \\ \times \int u(\bar{x}) \exp \left[i\pi \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{T} \right] \exp \left[-2\pi i \frac{\bar{x}\bar{y}}{S} \right] d\bar{x}, \quad (\text{B.12})$$

donde podemos identificar a la integral en \bar{x} como la FRFT de la función $u(\bar{x})$,

$$u_p^\alpha(\bar{y} - \alpha \cos \phi) = \exp \left[i\pi \left(\frac{\alpha^2 - 2\bar{y}\alpha \cos \phi + \alpha^2 \cos^2 \phi}{T} + \frac{2\alpha\bar{y} - 2\alpha^2 \cos \phi}{S} \right) \right] \times \\ \times u_p(\bar{y}). \quad (\text{B.13})$$

Efectuando el cambio de coordenadas inverso al expresado en las Ecs.(B.10a) y (B.10b) y realizando algunos pasos algebraicos y sustituciones trigonométricas sobre el término de fase, finalmente arribamos a la expresión

$$u_p^\alpha(y) = \exp \left[\frac{i\pi\alpha}{\lambda f_1} \sin \phi (2y + \alpha \cos \phi) \right] u_p(y + \alpha \cos \phi). \quad (\text{B.14})$$

B.3 Teorema de cambio de escala

Al realizar un cambio de escala, la señal se modifica como:

$$u(x) \longrightarrow u(\alpha x), \quad (\text{B.15})$$

y su transformada de Fourier fraccionaria esta dada por

$$u_p^\alpha(y) = \int u(\alpha x) \exp \left[i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f_1 \tan \phi} \right] \exp \left[-2\pi i \frac{xy}{\lambda f_1 \sin \phi} \right] dx. \quad (\text{B.16})$$

Cambiando las variables según

$$\bar{x} = \alpha x, \quad (\text{B.17a})$$

$$\bar{y} = \alpha y, \quad (\text{B.17b})$$

obtenemos

$$u_p^\alpha(\bar{y}/\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int u(\bar{x}) \exp \left[i\pi \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\lambda f_1 \alpha^2 \tan \phi} \right] \exp \left[-2\pi i \frac{\bar{x}\bar{y}}{\lambda f_1 \alpha^2 \sin \phi} \right] d\bar{x}. \quad (\text{B.18})$$

Haciendo la asignación

$$\alpha^2 \tan \phi = \tan \theta, \quad (\text{B.19})$$

y utilizando la identidad

$$\text{sen } \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}, \quad (\text{B.20})$$

podemos escribir

$$\alpha^2 \text{sen } \phi = e \text{sen } \theta, \quad (\text{B.21})$$

con

$$e = \sqrt{1 + \text{sen}^2 \phi (\alpha^4 - 1)}. \quad (\text{B.22})$$

Reemplazando las Ecs.(B.19) y (B.21) en (B.18), y realizando un nuevo cambio de variables

$$\tilde{y} = \frac{y}{e}, \quad (\text{B.23})$$

obtenemos

$$u_p^\alpha \left(\tilde{y} \frac{e}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} \int u(\bar{x}) \exp \left[i\pi \frac{\bar{x}^2 + e^2 \tilde{y}^2}{\lambda f_1 \tan \theta} \right] \exp \left[-2\pi i \frac{\bar{x} \tilde{y}}{\lambda f_1 \text{sen } \theta} \right] d\bar{x}. \quad (\text{B.24})$$

Sumando y restando un término de fase conveniente escribimos

$$\begin{aligned} u_p^\alpha \left(\tilde{y} \frac{e}{\alpha} \right) &= \frac{1}{\alpha} \exp \left[i\pi \frac{(e^2 - 1) \tilde{y}}{\lambda f_1 \tan \theta} \right] \times \\ &\times \int u(\bar{x}) \exp \left[i\pi \frac{\bar{x}^2 + \tilde{y}^2}{\lambda f_1 \tan \theta} \right] \exp \left[-2\pi i \frac{\bar{x} \tilde{y}}{\lambda f_1 \text{sen } \theta} \right] d\bar{x}, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

y podemos identificar a la integral en \bar{x} como la FRFT de $u(\bar{x})$ de orden \bar{p} con $\theta = \bar{p}\pi/2$, resultando

$$u_p^\alpha \left(\tilde{y} \frac{e}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} \exp \left[i\pi \frac{(e^2 - 1) \tilde{y}}{\lambda f_1 \tan \theta} \right] u_{\bar{p}}(\tilde{y}).$$

Realizando los cambios de variable inversos a los de las Ecs.(B.17a), (B.17b) y (B.23), finalmente podemos expresar

$$u_p^\alpha(y) = \frac{1}{\alpha} \Psi u_{\bar{p}} \left(\frac{y}{\sqrt{1/\alpha^2 + \text{sen}^2 \phi (\alpha^2 - 1/\alpha^2)}} \right), \quad (\text{B.26})$$

con

$$\Psi = \exp \left[\frac{i\pi y^2 (\alpha^4 - 1)}{\lambda f_1 (\alpha^4 \tan \phi + 1/\tan \phi)} \right], \quad (\text{B.27})$$

y

$$\bar{p} = \frac{2}{\pi} \arctan \left[\alpha^2 \tan (p\pi/2) \right]. \quad (\text{B.28})$$

B.4 Teorema de la derivada

La expresión de este teorema es:

$$\mathcal{F}^p u'(x) = u'_p(y) \cos \phi + u_p(y) 2\pi i y \sin \phi, \quad (\text{B.29})$$

donde $u'(x)$ es la derivada de $u(x)$ respecto de la variable x . Utilizando el operador integral para la FRFT, el primer miembro de la Ec. (B.29) queda

$$\mathcal{F}^p u'(x) = \int u'(x) \exp \left[i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f_1 \tan \phi} \right] \exp \left[-2\pi i \frac{xy}{\lambda f_1 \sin \phi} \right] dx. \quad (\text{B.30})$$

Si se define

$$\tilde{u}(x; \alpha) = u(x + \alpha), \quad (\text{B.31})$$

su derivada respecto de α se puede escribir como

$$\frac{d\tilde{u}(x; \alpha)}{d\alpha} = u'(x + \alpha). \quad (\text{B.32})$$

Tomado el valor de esta derivada en $\alpha = 0$, se obtiene

$$\left. \frac{d\tilde{u}(x; \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = u'(x). \quad (\text{B.33})$$

Si se aplica el operador FRFT a la ecuación anterior queda

$$\mathcal{F}^p \left. \frac{d\tilde{u}(x; \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d\mathcal{F}^p \tilde{u}(x; \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \mathcal{F}^p u'(x),$$

o bien

$$\left. \frac{d\tilde{u}_p(y; \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \mathcal{F}^p u'(x). \quad (\text{B.34})$$

Usando el resultado de la Ec. (B.14), la derivada en el término de la izquierda en la ecuación anterior se puede expresar como

$$\frac{d\tilde{u}_p(x; \alpha)}{d\alpha} = \exp \left[\frac{i\pi\alpha}{\lambda f_1} (2y + \alpha \cos \phi) \right] \left[u'_p(y + \alpha \cos \phi) \cos \phi + \right. \quad (\text{B.35})$$

$$\left. + u_p(y + \alpha \cos \phi) \frac{2\pi i \sin \phi}{\lambda f_1} (y + \alpha \cos \phi) \right]. \quad (\text{B.36})$$

Haciendo $\alpha = 0$ en la Ec. (B.35) y utilizando la Ec. (B.34) se obtiene la demostración del teorema

$$\mathcal{F}^p u'(x) = u'_p(y) \cos \phi + u_p(y) \frac{2\pi i y \sin \phi}{\lambda f_1}. \quad (\text{B.37})$$

Bibliografía

- [1] P. M. Duffieux, *L 'intégrale de Fourier et ses Applications à l 'Optique*, Univ. Besançon, 1946.
- [2] A. VanderLugt, *Optical signal processing*, Wiley series in Pure and Applied Optics, John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [3] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- [4] A. W. Lohmann, *Optical information processing*, 3ra. ed., Univ. Erlangen, 1986.
- [5] W. T. Cathey, *Optical information processing and holography*, Wiley, New York, 1974.
- [6] V. Namias, "The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics ", J. Inst. Math. Appl. **25**, 241 (1980).
- [7] A. C. McBride y F. H. Kerr, "On Namia's fractional Fourier transform ", IMA J. Appl. Math. **39**, 159 (1987).
- [8] H. M. Ozaktas y D. Mendlovic, "Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation ", Opt. Comm. **101**, 163 (1993).
- [9] A. W. Lohmann, "Image rotation, Wigner rotation and the fractional Fourier transform", J. Opt. Soc. Am. A **10**, 2181 (1993).
- [10] J. L. Horner, *Optical signal processing*, Academic, New York, 1987.

- [11] H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic y L. Onural, "Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms", J. Opt. Soc. Am. A **11**, 547 (1994).
- [12] D. Mendlovic y H. M. Ozaktas, "Fractional Fourier transformations and their optical implementation: Part I ", J. Opt. Soc. Am. A **10**, 1875 (1993).
- [13] D. Mendlovic y H. M. Ozaktas, "Fractional Fourier transformations and their optical implementation: Part II ", J. Opt. Soc. Am. A **10**, 2522 (1993).
- [14] A. Yariv, *Optical electronics*, 3ra. ed., Holt, New York, 1985.
- [15] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1970.
- [16] E. Wigner, "On the quantum correction for the thermodynamic equilibrium", Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [17] M. J. Baastians, "The Wigner distribution function applied to optical signals and systems ", Opt. Comm. **25**, 26 (1978).
- [18] H. O. Bartelt, K.-H. Brenner y A. W. Lohmann, "Wigner distribution function and its optical production", Opt. Comm. **32**, 32 (1980).
- [19] K.-H. Brenner y A. W. Lohmann, "Wigner distribution function display of complex 1D-signals", Opt. Comm. **42**, 310 (1982).
- [20] D. Zalvidea, M. Lehman, S. Granieri y E. E. Sicre, "Analysis of the Strehl ratio using the Wigner distribution function", Opt. Comm. **118**, 207 (1995).
- [21] G. Saavedra, W. D. Furlan, E. Silvestre y E. E. Sicre, "Analysis of the irradiance along different path in the image space using the Wigner distribution function", Opt. Comm. **139**, 11 (1997).
- [22] A. W. Lohmann, "A fake zoom lens for fractional Fourier experiments", Opt. Comm. **115**, 437 (1995).

- [23] L. Almeida, "An introduction to the angular Fourier transform", Proc. 1993 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal processing - Minneapolis (1993).
- [24] L. Almeida, "The fractional Fourier transform and time-frequency representations", IEEE trans. sig. proc. **42**, 3084 (1994).
- [25] P. M. Morse y H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, London, 1953.
- [26] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas y A. W. Lohmann, "Graded-index fibers, Wigner-distribution functions, and the fractional Fourier transform", Appl. Opt. **33**, 6188 (1994).
- [27] P. Pellat-Finet, "Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform", Opt. Lett. **19**, 1388 (1994).
- [28] P. Pellat-Finet y G. Bonnet, "Fractional order Fourier transform and Fourier optics", Opt. Comm. **111**, 141 (1994).
- [29] S. Abe y J. T. Sheridan, "Almost-Fourier and almost-Fresnel transformations", Opt. Comm. **113**, 385 (1995).
- [30] H. M. Ozaktas y D. Mendlovic, "Fractional Fourier optics", J. Opt. Soc. Am. A **12**, 743 (1995).
- [31] S. Granieri, O. Trabocchi y E. E. Sicre, "Fractional Fourier transform applied to spatial filtering in the Fresnel domain", Opt. Comm. **119**, 275 (1995).
- [32] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1968.
- [33] J. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*, Wiley series in Pure and Applied Optics, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [34] P. Andrés, W. D. Furlan, G. Saavedra y A. W. Lohmann, "Variable fractional Fourier processor: a simple implementation", J. Opt. Soc. Am. A **14**, 853 (1997).

- [35] K. G. Beauchamp, *Walsh functions and their applications*, Academic, New York, 1975.
- [36] J. Ojeda-Castañeda y E. E. Sicre, "Tunable bandstop filter for binary objects: a self-imaging technique", *Opt. Comm.* **47**, 183 (1983).
- [37] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda y E. E. Sicre, "Multiple interaction band-stop filters based on the Talbot effect", *Opt. Comm.* **49**, 388 (1984).
- [38] R. N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, New York, 1986.
- [39] E. O. Brigham, *The fast Fourier transform*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [40] D. Mendlovic, Z. Zalevsky, R. Dorsch, Y. Bitran, A. Lohmann y H. Ozaktas, "New signal representation based on the fractional Fourier transform: definitions", *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 2424 (1995).
- [41] S. Granieri, G. Saavedra, P. Andrés y W. Furlan, "Radon-Wigner display: a compact implementation with a single varifocal lens", *Appl. Opt.* **36**, 8363 (1997).
- [42] S. Granieri, W. Furlan y E. Sicre, "Performance analysis of optical imaging systems based on the fractional Fourier transform", *J. Mod. Opt.* (en prensa).
- [43] S. Granieri, D. Zalvidea y E. Sicre, "Fractional Fourier transform for the analysis of asymmetric apodization", 3rd Ibero American Optics Meeting, 28/09-02/10 (1998), Cartagena, Colombia (enviado).
- [44] J. C. Wood y D. T. Barry, "Radon transformation of time-frequency distributions for analysis of multicomponent signals", *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.* **4**, 257 (1992).
- [45] J. C. Wood y D. T. Barry, "Linear signal synthesis using the Radon-Wigner transform", *IEEE Trans. Signal Process.* **42**, 2105 (1994).
- [46] W. Li, "Wigner distribution method equivalent to dechirp method for detecting a chirp signal", *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **35**, 1210 (1987).

- [47] A. W. Lohmann y B. H. Soffer, "Relationships between the Radon-Wigner and fractional Fourier transforms", *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 1798 (1994).
- [48] D. Menlovic, R. G. Dorsch, A. W. Lohmann, Z. Zalevsky y C. Ferreira, "Optical illustration of a varied fractional Fourier transform order and the Radon -Wigner display", *Appl. Opt.* **35**, 3925 (1996).
- [49] H. Hopkins, "The frequency response of a defocused optical system", *Proc. Roy. Soc. A* **41**, 91 (1955).
- [50] K. -H. Brenner, A. W. Lohmann y J. Ojeda-Castañeda, "The ambiguity function as a polar display of the OTF", *Opt. Comm.* **44**, 323 (1983).
- [51] B. R. Frieden, *Progress in Optics* Vol IX, ed. E. Wolf, North Holland, Amsterdam, 1971.
- [52] J. Ojeda-Castañeda, L. Berriel-Valdos y E. Montes, " ", *Opt. Lett.* **10**, 520 (1985).
- [53] L. Cheng y G. G. Siu, "Asymmetric apodization", *Meas. Sci. Technol.* **2**, 198 (1991).
- [54] G. G. Siu, L. Cheng, D. S. Chiu y K. S. Chan, "Improved side-lobe suppression in asymmetric apodization", *J. Phys. D* **27**, 459 (1994).
- [55] A. VanderLugt, "Signal detection by complex spatial filtering", *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-10**, 139 (1964).
- [56] C. S. Weaver y J. W. Goodman, "A technique for optically convolving two functions", *Appl. Opt.* **5**, 1248 (1966).
- [57] L. M. Deen, J. F. Walkup y M. O. Hagler, "Representations of space-variant optical system using volume holograms", *Appl. Opt.* **14**, 2438 (1975).
- [58] T. F. Krile, R. J. Marks, J. F. Walkup y M. O. Hagler, "Holographic representations of space-variant systems using phase-coded reference beams", *Appl. Opt.* **16**, 3131 (1977).

- [59] J. A. Davis, D. M. Cottrell, N. Nestorovic y S. M. Highnote, "Space-variant Fresnel transform optical correlator", *Appl. Opt.* **31**, 6889 (1992).
- [60] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas y A. W. Lohmann, "Fractional correlation", *Appl. Opt.* **34**, 303 (1995).
- [61] D. Mendlovic, Y. Bitran, R. G. Dorsch y A. W. Lohmann, "Optical fractional correlation: experimental results", *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 1665 (1995).
- [62] S. Granieri, M. C. Lasprilla, N. Bolognini y E. E. Sicre, "Space-variant optical correlator based on the fractional Fourier transform: implementation by the use of a photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_2$ (BGO) holographic filter", *Appl. Opt.* **35**, 6951 (1996).
- [63] S. Granieri, R. Arizaga y E. E. Sicre, "Optical correlation based on the fractional Fourier transform", *Appl. Opt.* **36**, 6633 (1997).
- [64] P. Günter y J. P. Huignard, eds., *Photorefractive Materials and their Applications II*, Springer, Berlin, 1989.
- [65] M. C. Lasprilla, S. Granieri y N. Bolognini, "Optical correlator by non-degenerate four wave mixing", *Optik* **105**, 61 (1997).
- [66] F. T. S. Yu y S. Yin, "Bragg diffraction-limited photorefractive crystal-based correlators", *Opt. Eng.* **34**, 2224 (1995).
- [67] C. Gu, H. Fu y J. -R. Lien, "Correlation patterns and crosstalk noise in volume holographic optical correlators", *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 861 (1995).
- [68] S. -Y. Lee y H. H. Szu, "Fractional Fourier transform, wavelet transforms, and adaptive neural networks", *Opt. Eng.* **33**, 2326 (1994).
- [69] J. Ojeda-Castañeda, E. Tepichin y A. Fons, "Apodization of annular apertures: Strehl ratio", *Appl. Opt.* **27**, 5140 (1983).
- [70] S. Ledesma y C. Iemmi, "Fraunhofer diffraction patterns generated by Cantor phase gratings", *Optik* **97**, 9 (1994).

- [71] T. Alieva y F. Agulló-Lopez, "Optical wave propagation of fractal fields", *Opt. Comm.* **125**, 267 (1996).